Vrije Universiteit Brussel
Faculteit Ingenieurswetenschappen

Lineaire Algebra

Volume I

Philippe Cara

Syllabus voor het college “Lineaire algebra: stelsels, matrices en afbeeldingen”
in de Eerste Bachelor Ingenieurswetenschappen
en het Eerste jaar van de verkorte programma’s Burgerlijk Ingenieur
alsook de eerste bachelors Wiskunde en Fysica.

2017

Inhoudsopgave

Dankwoord

Ik wil in het bijzonder professor Caenepeel, de vorige titularis van dit vak, bedanken. De cursusnota's die voor u liggen zijn grotendeels van zijn hand en hij staat bovendien steeds klaar met goede raad en steun voor mijn contacten met de faculteit IR.

Verder werden veel verbeteringen aangebracht aan de nota's door assistenten Erwin De Groot, Kris Janssen en Joost Vercruysse. Nieuwe oefeningen werden opgesteld door Inneke Van Gelder, Sara Rottey en Isar Goyvaerts.

Brussel, 19 december 2016,
Philippe Cara

Hoofdstuk 1

Vectorruimten

1.1 Reële en complexe vectorruimten

In het middelbaar onderwijs hebben we gezien dat een handige manier om vlakke meetkunde te bedrijven de volgende is: we voeren een (eventueel rechthoekig) coördinatenstelsel in. Elk punt van het vlak stemt dan overeen met een koppel reële getallen (x,y). Dit levert ons een manier om met punten in het vlak te "rekenen": ze worden weergegeven door getallen. Dit laat ons toe om meetkundige begrippen te beschrijven op een algebraïsche manier. Zo wordt een rechte bijvoorbeeld beschreven door een vergelijking van het type $ax+by+c=0$.
Een concept dat hierin een centrale rol speelt is het concept *vector*: voor twee punten A en B in het vlak, noteren we $\vec{AB}$ voor de "vector" die de punten A en B verbindt. Hierbij wordt per definitie de overeenkomst gemaakt dat twee vectoren $\vec{AB}$ en $\vec{CD}$ aan mekaar gelijk zijn als A, B, D en C de hoekpunten van een parallellogram zijn. Indien we een punt O (*oorsprong* genaamd) in het vlak fixeren, dan is het gemakkelijk in te zien (dit volgt uit de axioma's van Euclides) dat elke vector $\vec{AB}$ op een unieke manier kan geschreven worden onder de vorm $\vec{OP}$ voor een zeker punt P in het vlak. Het is daarom dat we soms $\vec{P}=\vec{OP}$ noteren.
Op deze manier krijgen we een één-éénduidige correspondentie tussen de punten van het vlak en de vectoren in het vlak, en daardoor met de koppels reële getallen: de vector $\vec{AB}=\vec{OP}$ stemt overeen met het punt P in het vlak, en dit komt overeen met de coördinaten (x,y) van P in $\mathbb{R}^2$.
Een belangrijk hulpmiddel blijkt te zijn het feit dat we vectoren (en a fortiori ook koppels reële getallen en punten in het vlak) met mekaar kunnen optellen. Dit gaat als volgt:
voor **vectoren**:

$$\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC};$$

voor **punten in het vlak**:

$$\vec{P}+\vec{Q}=\vec{R}$$

als O, P, R en Q de hoekpunten van een parallellogram zijn;
voor **koppels reële getallen**:

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$$

Op analoge manier kan men vectoren (punten, koppels reële getallen) vermenigvuldigen met reële getallen. Deze vermenigvuldiging wordt **scalaire vermenigvuldiging** genoemd. Voor koppels reële getallen gaat dit als volgt:

$$\alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$$

Deze optelling en vermenigvuldiging voldoen aan een aantal voor de hand liggende eigenschappen. Laten we deze even opsommen, we identificeren onze vectoren (of punten) vanaf nu met koppels reële getallen.

De verzameling der koppels reële getallen $\mathbb{R}^2$ vormt een *commutatieve groep* voor de optelling: de optelling van koppels reële getallen is commutatief en associatief, $(0,0)$ is een neutraal element voor de optelling, en elk tweetal (a,b) heeft een tegengestelde $(-a,-b)$.

Verder geldt dat de scalaire vermenigvuldiging distributief is ten opzichte van de optelling:

$$\begin{aligned} \alpha(\vec{a}+\vec{b}) &= \alpha\vec{a}+\alpha\vec{b} \\ (\alpha+\beta)\vec{a} &= \alpha\vec{a}+\beta\vec{a} \end{aligned}$$

voor $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, $\vec{a},\ \vec{b} \in \mathbb{R}^2$. De vermenigvuldiging is **gemengd associatief**:

$$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$$

voor $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$. Tenslotte is

$$1\vec{a} = \vec{a}$$

voor alle $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$.

Dezelfde redenering kunnen we volgen als we meetkunde in de ruimte bedrijven. Het enige verschil is dat we nu met drietallen in plaats van koppels reële getallen werken. Het ligt daarom voor de hand om te onderstellen dat dit in nog andere situaties kan werken. Dit is inderdaad het geval, zoals we in de volgende voorbeelden zullen zien. Daarom voeren we het volgende abstracte begrip in : een *vectorruimte* is een verzameling V, uitgerust met een optelling en een scalaire vermenigvuldiging met reële getallen, die voldoet aan de eigenschappen hierboven opgesomd. In sommige gevallen is het nuttig om ook vectorruimten te bekijken waarop een vermenigvuldiging met complexe getallen gedefinieerd is. Om de definitie geen twee keer te moeten schrijven noteren we daarom in het vervolg $\mathbb{K}$ voor de reële of de complexe getallen: $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ of $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Bij een eerste lezing van deze nota's is het aanbevolen om enkel het geval $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ te beschouwen, en dus in gedachten overal $\mathbb{K}$ door $\mathbb{R}$ te vervangen.

Definitie 1.1.1. *Een verzameling V uitgerust met twee bewerkingen*

$$\begin{aligned} + &: V\times V \longrightarrow V \\ \cdot &: \mathbb{K}\times V \longrightarrow V \end{aligned}$$

*is een **vectorruimte** (Eng.* vector space, *Fr.* espace vectoriel*) over $\mathbb{K}$ (of kortweg $\mathbb{K}$-vectorruimte) indien volgende eigenschappen gelden:*
*V is een **commutatieve groep**, d.w.z.*

1. *$+$ is associatief:*
$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \tag{1.1}$$
voor elke $\vec{a},\vec{b},\vec{c} \in V$.

2. *Er is een neutraal element* $\vec{0}$*:*
$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a} \tag{1.2}$$
voor elke $\vec{a}\in V$.

3. *Elk element* $\vec{a}\in V$ *heeft een tegengestelde* $-\vec{a}$*:*
$$\vec{a}+(-\vec{a})=-\vec{a}+\vec{a}=\vec{0} \tag{1.3}$$

4. $+$ *is commutatief:*
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \tag{1.4}$$
voor elke $\vec{a},\vec{b}\in V$.

De scalaire vermenigvuldiging $\mathbb{K}\times V\longrightarrow V$ *voldoet aan de volgende eigenschappen:*

1. *gemengde associativiteit:*
$$(\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a}) \tag{1.5}$$
voor elke $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ *en* $\vec{a}\in V$*;*

2. *distributiviteit:*
$$\begin{aligned}\alpha(\vec{a}+\vec{b}) &= \alpha\vec{a}+\alpha\vec{b} &(1.6)\\ (\alpha+\beta)\vec{a} &= \alpha\vec{a}+\beta\vec{a} &(1.7)\end{aligned}$$
voor elke $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ *en* $\vec{a},\vec{b}\in V$*;*

3. 1 *is neutraal element:*
$$1\vec{a}=\vec{a} \tag{1.8}$$
voor elke $\vec{a}\in V$.

Opmerkingen 1.1.2. 1) Indien $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, dan spreken we van een **reële vectorruimte**. Als $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, dan spreken we van een **complexe vectorruimte**. De elementen van V worden **vectoren** genoemd, en meestal genoteerd door letters met een pijltje erboven; in sommige werken worden deze aangeduid door vetgedrukte letters, of door hoofdletters. De elementen van $\mathbb{K}$ worden **scalairen** genoemd. Wij zullen deze meestal noteren met Griekse letters.

2) De **aftrekking** wordt gedefinieerd door volgende formule:
$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

3) De volgende eigenschappen gelden in elke vectorruimte:
$$\begin{aligned}0\vec{a} &= \vec{0} &(1.9)\\ \alpha\vec{0} &= \vec{0} &(1.10)\\ (\alpha-\beta)\vec{a} &= \alpha\vec{a}-\beta\vec{a} &(1.11)\\ \alpha\vec{a}=\vec{0} &\Rightarrow \alpha=0 \text{ of } \vec{a}=\vec{0} &(1.12)\\ (-1)\vec{a}=-\vec{a} & &(1.13)\end{aligned}$$

Bewijs deze zelf als oefening.

4) In feite hoeven we ons niet te beperken tot $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ of $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. We kunnen voor $\mathbb{K}$ eender welk lichaam nemen. Herhaal dat een **commutatief lichaam** (ook genaamd **veld**, Eng. *field*, Fr. *corps commutatif*) bestaat uit een verzameling $\mathbb{K}$ uitgerust met een optelling $+$ en een vermenigvuldiging $.$ zodat volgende eigenschappen gelden:

1. $\mathbb{K}$ is een commutatieve groep voor de optelling;
2. $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ is een commutatieve groep voor de vermenigvuldiging;
3. $.$ is distributief t.o.v. $+$.

Zo kan men bijvoorbeeld $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ nemen. Een ander belangrijk voorbeeld is dat waar men voor $\mathbb{K}$ een eindig lichaam neemt. Men kan bewijzen dat voor elk priemgetal p, en voor elk natuurlijk getal $n \neq 0$ er juist één lichaam met p^n elementen bestaat. Dit wordt genoteerd door $\mathbb{F}_{p^n}$. Eindige lichamen spelen een cruciale rol in de algebraïsche codetheorie.

5) Een vectorruimte is nooit leeg als verzameling, aangezien steeds $\vec{0} \in V$.

Voorbeelden 1.1.3. 1) $\mathbb{R}^n$ is een reële vectorruimte. Optelling en vermenigvuldiging worden gegeven door:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \\ \alpha(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n) \end{aligned}$$

Voor $n = 2$ en $n = 3$ krijgen we opnieuw de voorbeelden die aanleiding gaven tot het invoeren van vectorruimten. Als we $n = 1$ stellen, dan bekomen we dat $\mathbb{R}$ zelf een reële vectorruimte is.

2) $\mathbb{C}^n$ is een complexe vectorruimte. Definitie van optelling en vermenigvuldiging zijn dezelfde als hierboven.

3) Neem een willekeurige verzameling A, en schrijf $\mathbb{R}^A$ voor de verzameling van alle functies van A naar $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R}^A = \{f : A \to \mathbb{R} \mid f \text{ is een functie}\}$$

$\mathbb{R}^A$ is een vectorruimte, met volgende bewerkingen: voor $f, g : A \to \mathbb{R}$ en $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren we $f + g$ en αf door

$$f + g : A \to \mathbb{R} : a \mapsto f(a) + g(a)$$

$$\alpha f : A \to \mathbb{R} : a \mapsto \alpha f(a)$$

voor elke $a \in A$. Op analoge manier is $\mathbb{C}^A$ een complexe vectorruimte.

4) We noteren

$$\mathbb{R}[X] = \{P(X) \mid P \text{ is een veelterm met reële coëfficiënten in de veranderlijke } X\}$$

voor de verzameling der reële veeltermen. $\mathbb{R}[X]$ is een reële vectorruimte. Schrijf zelf de definitie van optelling en vermenigvuldiging op. Op dezelfde manier is $\mathbb{C}[X]$ een complexe vectorruimte.

5) Voor elke $n \in \mathbb{N}$ noteren we

$$\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \mathrm{gr}(P) \leq n\}$$

voor de verzameling der veeltermen van graad ten hoogste n. $\mathbb{R}_n[X]$ is een vectorruimte.

6) $\{\vec{0}\}$ is een vectorruimte.

7) Elke complexe vectorruimte is tevens een reële vectorruimte. Inderdaad, indien een scalaire vermenigvuldiging met complexe getallen gedefinieerd is, dan is ook automatisch een scalaire vermenigvuldiging met reële getallen gedefinieerd, en het is gemakkelijk te zien dat deze voldoet aan de voorwaarden (1.5)–(1.8). Men noemt dit **restrictie van scalairen**.

1.2 Deelruimte en directe som van vectorruimten

We hebben hierboven gezien dat $\mathbb{R}_n[X]$ een vectorruimte is, en dat bovendien

$$\mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{R}[X].$$

De bewerkingen op $\mathbb{R}_n[X]$ zijn hier de restricties van de bewerkingen op $\mathbb{R}[X]$. We zeggen dat $\mathbb{R}_n[X]$ een *deelruimte* is van $\mathbb{R}[X]$.

Definitie 1.2.1. *Onderstel dat V een vectorruimte is. Dan is een deelverzameling $W \subset V$ een deelvectorruimte of **deelruimte** (Eng.* subspace*, Fr.* sousespace*) als W met de beperking van de som en de scalaire vermenigvuldiging op V zelf een vectorruimte is.*

In de hiernavolgende stelling zullen we een gemakkelijk criterium zien om na te gaan of een deel W van V een deelruimte is. Vooraf herhalen we even de Σ-notatie voor een eindige som:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

voor $a_i \in \mathbb{K}$ of voor de a_i vectoren in een vectorruimte V.

Stelling 1.2.2. *Zij W een niet-lege deelverzameling van de vectorruimte V. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*

1. *W is een deelruimte van V;*
2. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in W, \forall \alpha \in \mathbb{K}: \ \vec{a} + \vec{b} \in W$ en $\alpha\vec{a} \in W$;
3. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in W, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}: \ \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \in W$;
4. *voor $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in W$ en $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ geldt dat $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{a}_i \in W$.*

Een uitdrukking van de vorm

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{a}_i = \alpha_1 \vec{a}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{a}_n$$

noemen we een **lineaire combinatie** van de vectoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$. Stelling 1.2.2 vertelt ons dus dat een deelruimte niets anders is dan een deelverzameling die gesloten is onder het nemen van lineaire combinaties.

Bewijs. $1) \Rightarrow 2) \Leftrightarrow 3) \Leftrightarrow 4)$ zijn triviaal.
$2) \Rightarrow 1)$. Het volgt direct uit 2) dat W gesloten is onder het nemen van som en scalaire vermenigvuldiging. Het volstaat dus de voorwaarden (1.1)–(1.8) te controleren. (1.1), (1.4), (1.5), (1.6), (1.7), (1.8) zijn automatisch voldaan, omdat deze gelden in V. Het volstaat dus om te controleren dat $\vec{0} \in W$ en dat $-\vec{a} \in W$ indien $\vec{a} \in W$. Voor (1.2) volstaat het een $\vec{a} \in W$ te nemen (W is bij onderstelling niet leeg), en $\alpha = 0$ te stellen. Voor (1.3) nemen we $\alpha = -1$. □

Voorbeelden 1.2.3. 1) $\{\vec{0}\}$ en V zijn steeds deelruimten van V. We noemen deze de **triviale deelruimten**. Alle andere deelruimten heten **echte deelruimten**.

2) $\mathscr{C}[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continu}\}$ is een deelruimte van de vectorruimte $\mathbb{R}^{[a,b]}$. Inderdaad, een lineaire combinatie van continue functies is steeds continu (zie cursus Analyse).

3) Beschouw $\mathbb{C}$ als een reële vectorruimte. Dan is $\mathbb{R}$ een deelruimte van $\mathbb{C}$.

4) Als W_1 en W_2 deelruimten zijn van V, dan is ook $W_1 \cap W_2$ een deelruimte van V. Inderdaad, als W_1 en W_2 gesloten zijn onder het nemen van lineaire combinaties, dan is $W_1 \cap W_2$ het ook.

5) Neem weer twee deelruimten W_1 en W_2 van V. Per definitie stellen we de **som** $W_1 + W_2$ gelijk aan

$$W_1 + W_2 = \{\vec{a} + \vec{b} \mid \vec{a} \in W_1,\ \vec{b} \in W_2\}$$

Bewijs zelf met behulp van bovenstaande stelling dat $W_1 + W_2$ een nieuwe deelruimte van V is.

Voorbeeld 4) hierboven kan veralgemeend worden, tot de doorsnede van een willekeurig (eventueel oneindig) aantal deelruimten. Herhaal eerst dat de doorsnede van een verzameling verzamelingen $\{A_i \mid i \in I\}$ geïndexeerd door een indexverzameling I gegeven wordt door

$$\bigcap\{A_i \mid i \in I\} = \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I : x \in A_i\},$$

met andere woorden

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in I : x \in A_i.$$

Merk op dat dit impliceert dat voor elke $j \in I$:

$$\bigcap_{i \in I} A_i \subset A_j$$

Stelling 1.2.4. *Indien $\{W_i \mid i \in I\}$ een verzameling deelruimten van een vectorruimte V is, dan is $W = \bigcap_{i \in I} W_i$ ook een deelruimte van V*

Bewijs. We controleren voorwaarde 3) in stelling 1.2.2. Neem $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$ en $\vec{a},\vec{b} \in \cap_{i\in I} W_i$. Dan geldt voor elke $i \in I$ dat $\vec{a},\vec{b} \in W_i$, en dus vanwege voorwaarde 3) in stelling 1.2.2:

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b} \in W_i$$

Maar dan is

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b} \in \cap_{i\in I} W_i$$

en dus voldoet $\cap_{i\in I} W_i$ aan voorwaarde 3). □

Neem nu een deelverzameling A van V die zelf niet noodzakelijk een deelruimte is, en bekijk de verzameling

$$\{W \mid W \text{ deelruimte van } V \text{ en } A \subset W\}$$

van alle deelruimten van V die A omvatten. Deze verzameling is zeker niet leeg, want V zelf zit erin. Uit stelling 1.2.4 volgt dat

$$X = \cap\{W \mid W \text{ deelruimte van } V \text{ en } A \subset W\}$$

een deelruimte is van V. Aangezien A zelf een deel is van alle W die A omvatten, geldt dat $A \subset X$. Dus is X de (unieke) deelruimte van V met de volgende eigenschappen:

1. $A \subset X$;
2. Als $A \subset W$ en W een deelruimte, dan is $X \subset W$.

Met andere woorden, X is de *kleinste deelruimte van V die A omvat*. We noemen X de **vectorruimte voortgebracht door** A, en we noteren dit als

$$X = \mathrm{vect}(A).$$

We zeggen ook dat de verzameling A de vectorruimte X **voortbrengt**. In de volgende stelling zullen we een expliciete beschrijving van $\mathrm{vect}(A)$ geven.

Stelling 1.2.5. *Onderstel dat $\emptyset \neq A \subset V$. Dan is*

$$\mathrm{vect}(A) = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\vec{a}_i \mid n \in \mathbb{N}_0,\ \alpha_i \in \mathbb{K},\ \vec{a}_i \in A\},$$

met andere woorden, $\mathrm{vect}(A)$ *is de verzameling van alle lineaire combinaties van elementen van A.*

Bewijs. Stel Y de verzameling van alle lineaire combinaties van elementen van A. Het volstaat aan te tonen dat Y een deelruimte is en aan de twee hierboven vermelde voorwaarden voldoet:

1. $A \subset Y$;
2. Als $A \subset W$ en W een deelruimte, dan is $Y \subset W$.

het is duidelijk dat Y een deelruimte is, omdat een lineaire combinatie van lineaire combinaties van elementen van A opnieuw een lineaire combinatie is van elementen van A. Het is ook duidelijk dat $A \subset Y$, omdat de elementen van A zelf — op triviale wijze — lineaire combinaties zijn van elementen van A. Tenslotte, als W een deelruimte is van V die A omvat, dan bevat deze, vanwege stelling 1.2.2 ook alle lineaire combinaties van A en dus omvat ze Y. $\square$

Opmerking 1.2.6. *Men kan zich afvragen wat er gebeurt als $A = \varnothing$ in voorgaande stelling. Het volstaat dan te redeneren als volgt. De deelruimte voortrgebracht door $\varnothing$ is per definitie de kleinste deelruimte van V die $\varnothing$ omvat. Dit moet dan zeker de allerkleinste deelruimte van V zijn zodat* $\mathrm{vect}\,(\varnothing) = \{\vec{0}\}$.

We hebben hierboven gezien dat de doorsnede van twee deelruimten opnieuw een deelruimte is. De lezer zal zich afvragen of dit ook geldt voor de unie van twee deelruimten. Dit is niet het geval. Wel hebben we

Stelling 1.2.7. *Indien W_1 en W_2 twee deelruimten van V zijn, dan geldt*

$$\mathrm{vect}\,(W_1 \cup W_2) = W_1 + W_2$$

waarbij $W_1 + W_2$ gedefinieerd wordt zoals in voorbeeld 5 hierboven.

Bewijs. We hebben al gezien dat $W_1 + W_2$ een deelruimte is. Het volstaat dus om te bewijzen dat

1. $W_1 \cup W_2 \subset W_1 + W_2$;
2. Als $W_1 \cup W_2 \subset W$ en W een deelruimte, dan is $W_1 + W_2 \subset W$.

De eerste voorwaarde is duidelijk. Voor voorwaarde 2) gaan we als volgt tewerk: onderstel W een deelruimte die W_1 en W_2 bevat. Vanwege voorwaarde 2) in stelling 1.2.2 geldt dan dat, voor elke $\vec{a} \in W_1 \subset W$, $\vec{b} \in W_2 \subset W$ dat

$$\vec{a} + \vec{b} \in W$$

en dus $W_1 + W_2 \subset W$. $\square$

Definitie 1.2.8. *Beschouw twee deelruimten W_1 en W_2 van de vectorruimte V. We noemen de vectorruimte W de* ***directe som*** *van W_1 en W_2 als voldaan is aan de twee volgende voorwaarden:*

1. $W = W_1 + W_2$;

2. $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$.

We noteren dit als volgt : $W = W_1 \oplus W_2$.

Stelling 1.2.9. *Een vectorruimte W is de directe som van twee van haar deelruimten W_1 en W_2 als en slechts als elk element van W op een* **unieke** *manier kan geschreven worden als de som van een element van W_1 en een element van W_2, m.a.w. als*

$$\forall \vec{w} \in W,\ \exists! \vec{w}_1 \in W_1,\ \exists! \vec{w}_2 \in W_2 :\ \vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$$

Bewijs. Onderstel eerst dat $W = W_1 \oplus W_2$. We weten reeds dat elke vector in W de som is van een vector in W_1 en een in W_2. We moeten enkel bewijzen dat deze ontbinding uniek is. Onderstel dat

$$\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 = \vec{w}_1' + \vec{w}_2'$$

met $\vec{w}_1,\ \vec{w}_1' \in W_1$ en $\vec{w}_2,\ \vec{w}_2' \in W_2$. Dan is

$$\vec{w}_1 - \vec{w}_1' = \vec{w}_2' - \vec{w}_2 \in W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$$

zodat

$$\vec{w}_1 - \vec{w}_1' = \vec{w}_2' - \vec{w}_2 = \vec{0}$$

en dus

$$\begin{aligned} \vec{w}_1 &= \vec{w}_1' \\ \vec{w}_2 &= \vec{w}_2' \end{aligned}$$

zodat de ontbinding inderdaad uniek is.
Omgekeerd, onderstel dat elke vector in W de unieke som is van een vector in W_1 en een in W_2. Dan is uiteraard $W = W_1 + W_2$, zodat we enkel hoeven te bewijzen dat $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$. Als $\vec{w} \in W_1 \cap W_2$, dan zijn

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{w} + \vec{0} \\ \vec{w} &= \vec{0} + \vec{w} \end{aligned}$$

twee manieren om $\vec{w}$ als een som van elementen uit W_1 en W_2 te schrijven. Derhalve is, vanwege de uniciteit, $\vec{w} = \vec{0}$. □

Alvorens een eenvoudig voorbeeld te geven voeren we de volgende notatie in: voor $\vec{a} \in V$ noteren we

$$\mathbb{K}\vec{a} = \text{vect}\{\vec{a}\} = \{\alpha\vec{a} | \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

Voorbeeld 1.2.10.

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}(1,0) \oplus \mathbb{R}(0,1).$$

1.3 Lineaire onafhankelijkheid

Alvorens dit begrip formeel te definiëren, keren we even terug naar de meetkunde in de ruimte. Bekijk twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Er zijn twee mogelijkheden:
1) Het kan zijn dat $\vec{a}$ en $\vec{b}$ dezelfde richting hebben. In dit geval geldt

$$\vec{a} = \alpha\vec{b} \ \text{ of } \ \vec{b} = \beta\vec{a}$$

(we moeten deze laatste mogelijkheid ook beschouwen, omdat het zou kunnen dat $\vec{b} = \vec{0}$). We kunnen dit herschrijven als volgt:

$$\alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b} = \vec{0}$$

met $\alpha' \neq 0$ of $\beta' \neq 0$. We zeggen in dit geval dat $\vec{a}$ en $\vec{b}$ *lineair afhankelijk* zijn.
2)

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$$

is enkel mogelijk indien zowel $\alpha = 0$ als $\beta = 0$. In dit geval zijn $\vec{a}$ en $\vec{b}$ geen evenwijdige vectoren, en we zeggen dat $\vec{a}$ en $\vec{b}$ *lineair onafhankelijk* zijn.
Neem nu drie vectoren $\vec{a}, \vec{b}$ en $\vec{c}$. Er zijn weer twee mogelijkheden:
1) Er bestaan $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, niet alle drie nul, zodat

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$$

In dit geval is een van de drie vectoren een lineaire combinatie van de twee anderen. Inderdaad, als bijvoorbeeld $\alpha \neq 0$, dan is

$$\vec{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{b} - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{c}$$

en dus liggen de drie vectoren $\vec{a}, \vec{b}$ en $\vec{c}$ in eenzelfde vlak.
2) De enige mogelijkheid opdat

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$$

is dat $\alpha = \beta = \gamma = 0$. In dit geval is het dus onmogelijk om een van de drie vectoren als een lineaire combinatie van de twee anderen te schrijven. De drie vectoren zijn dan niet coplanair.
Laten we deze beschouwingen nu veralgemenen.

Definitie 1.3.1. *Onderstel dat V een $\mathbb{K}$-vectorruimte is, en dat $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in V$. We noemen $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$* ***lineair afhankelijk*** *als er $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ bestaan, niet alle nul, zodat de lineaire combinatie*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{a}_i$$

de nulvector is.

We kunnen nu gemakkelijk bewijzen dat

Stelling 1.3.2. *$\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ is lineair afhankelijk als en slechts als één van de vectoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ een lineaire combinatie is van de overige.*

Bewijs. Indien

$$\vec{a}_i = \alpha_1\vec{a}_1 + \cdots + \alpha_{i-1}\vec{a}_{i-1} + \alpha_{i+1}\vec{a}_{i+1} + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n$$

Dan is

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \cdots + \alpha_{i-1}\vec{a}_{i-1} - \vec{a}_i + \alpha_{i+1}\vec{a}_{i+1} + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

met tenminste de i-de coëfficiënt verschillend van 0, en dus is $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ lineair afhankelijk.
Omgekeerd, onderstel dat $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ lineair afhankelijk is. Dan is

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{a}_i = \vec{0}$$

met tenminste één van de coëfficënten, bijvoorbeeld α_j, verschillend van nul. Dan hebben we dat

$$\vec{a}_j = -\frac{\alpha_1}{\alpha_j}\vec{a}_1 - \cdots - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j}\vec{a}_{j-1} - \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}\vec{a}_{j+1} - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_j}\vec{a}_n \tag{1.14}$$

een lineaire combinatie is van de overige vectoren. □

Men kan de voorgaande stelling nog een beetje verfijnen als volgt:

Stelling 1.3.3. *$\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ is lineair afhankelijk als en slechts als één van de vectoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ een lineaire combinatie is van de voorgaande.*

Bewijs. Neem in het voorgaande bewijs de maximale index j waarvoor $\alpha_j \neq 0$ (eventueel $j = n$). Dan wordt (1.14):

$$\vec{a}_j = -\frac{\alpha_1}{\alpha_j}\vec{a}_1 - \cdots - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j}\vec{a}_{j-1}, \tag{1.15}$$

en dit is juist wat we moeten hebben. □

Definitie 1.3.4. *De verzameling $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ wordt **lineair onafhankelijk** genoemd als ze niet lineair afhankelijk is, dus als een lineaire combinatie*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{a}_i$$

enkel de nulvector kan zijn als alle coëfficiënten α_i nul zijn.

Gevolg 1.3.5. *De volgende eigenschappen zijn equivalent:*

1. *$\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ is lineair onafhankelijk;*
2. *geen enkel van de vectoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ is een lineaire combinatie van de overige;*
3. *geen enkel van de vectoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ is een lineaire combinatie van de vorige.*

Bewijs. Dit volgt onmiddellijk uit de stelling 1.3.2 en 1.3.3, door contrapositie. □

1.4 Basis en dimensie

Definitie 1.4.1. *Beschouw een vectorruimte V en een eindig deel $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$. B wordt een **basis** genoemd indien*

1. *B een voortbrengend deel van V is:* $\mathrm{vect}(B) = V$*;*
2. *B lineair onafhankelijk is.*

Stelling 1.4.2. *$B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\} \subset V$ is een basis van V als en slechts als elke vector $\vec{v}$ van V op een unieke manier kan geschreven worden als een lineaire combinatie van de vectoren $\vec{b}_i$:*

$$\forall \vec{v} \in V,\ \exists!\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} :\ \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{b}_i$$

Bewijs. Onderstel eerst dat B een basis is. Omdat B de vectorruimte V voortbrengt, kunnen we elke vector $\vec{v}$ als een lineaire combinatie van de $\vec{b}_i$ schrijven. Onderstel nu dat

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{b}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' \vec{b}_i$$

Dan is

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_i') \vec{b}_i = \vec{0},$$

zodat

$$\alpha_i - \alpha_i' = 0$$

voor elke i, omdat B lineair onafhankelijk is. Dus $\alpha_i = \alpha_i'$, en de uniciteit is bewezen.
Omgekeerd, onderstel dat elke $\vec{v} \in V$ op een unieke manier een lineaire combinatie is van de vectoren in B. Dan is B voortbrengend. Als

$$\alpha_1 \vec{b}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{b}_n = \vec{0}$$

dan hebben we

$$\alpha_1 \vec{b}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{b}_n = 0\vec{b}_1 + \cdots + 0\vec{b}_n = \vec{0}$$

en dus $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, omdat we anders $\vec{0}$ op meer dan één manier als een lineaire combinatie van de vectoren in B kunnen schrijven. B is dus ook lineair onafhankelijk. □

Voorbeeld 1.4.3. $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ is een basis van $\mathbb{R}^3$. Immers, voor elke $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ hebben we

$$(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$$

zodat B voortbrengend is. Bovendien impliceert

$$a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = (0,0,0)$$

dat $a = b = c = 0$, zodat B lineair onafhankelijk is. We noemen B de **standaardbasis** van $\mathbb{R}^3$. Schrijf zelf de standaardbasis voor $\mathbb{R}^n$ op.

Stelling 1.4.4. *Onderstel dat een eindig deel $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}$ de vectorruimte V voortbrengt. Dan bestaat er een basis B van V die bevat is in A.*

Bewijs. Indien A lineair onafhankelijk is, dan valt er niets te bewijzen. Indien A lineair afhankelijk is, dan is een van de $\vec{a}_j$ een lineaire combinatie van de overige. Maar dan is duidelijk

$$\mathrm{vect}(A \setminus \{\vec{a}_j\}) = \mathrm{vect}(A) = V$$

en dus is $A \setminus \{\vec{a}_j\}$ voortbrengend. Weer zijn er twee mogelijkheden: indien $A \setminus \{\vec{a}_j\}$ lineair onafhankelijk is, dan is het een basis en is de stelling bewezen. Anders kunnen we weer een vector schrappen en zodoende een voortbrengende verzameling met $m-2$ elementen bekomen. We zetten dit verder tot we een lineair onafhankelijk stel overhouden. Dit wordt bereikt na ten hoogste m stappen, want als we m vectoren schrappen, dan behouden we een voortbrengende verzameling met 0 elementen (dus de lege verzameling). Dan is $V = \text{vect}\,(\emptyset)$, en $\emptyset$ is dan een basis voor V. $\square$

Een vectorruimte V die een eindig voortbrengend stel bezit (en dus een eindige basis bezit) wordt **eindigdimensionaal** genoemd. Anders noemen we V **oneindigdimensionaal**. In het volgende voorbeeld zullen we aantonen dat oneindigdimensionale vectorruimten wel degelijk bestaan. In deze cursus bestuderen we voornamelijk eindigdimensionale vectorruimten.

Voorbeeld 1.4.5. $\mathbb{R}[X]$ is een oneindigdimensionale vectorruimte. Immers, onderstel dat

$$\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$$

een eindig deel van $\mathbb{R}[X]$ is, en stel

$$r = \max\{\text{gr}(P_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$$

Dan bevat

$$\text{vect}\,(\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}) = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

enkel veeltermen van graad ten hoogste r. Dus brengt $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ niet de volledige ruimte $\mathbb{R}[X]$ voort.

Een vectorruimte die een basis heeft, heeft meer dan één basis (zelfs oneindig veel). Ons volgend doel is te bewijzen dat alle basissen van eenzelfde vectorruimte hetzelfde aantal elementen hebben. Hiervoor hebben we eerst een lemma nodig.

Lemma 1.4.6. *Als $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ een basis is voor V, en $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ een lineair onafhankelijke verzameling in V, dan is $r \leq n$.*

Bewijs. Stel $S_1 = \{\vec{v}_1, \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$. Omdat B een basis is, is $\vec{v}_1$ een lineaire combinatie van de $\vec{b}_i$'s, en dus is S_1 een lineair afhankelijke verzameling. Maar dan is één van de vectoren in S_1 een lineaire combinatie van de *vorige*, cf. stelling 1.3.3. Dit kan natuurlijk niet $\vec{v}_1$ zijn, en dus is het $\vec{b}_j$ voor een bepaalde index j. We schrappen deze $\vec{b}_j$, en noemen de nieuw bekomen verzameling B_1:

$$B_1 = \{\vec{v}_1, \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{j-1}, \vec{b}_{j+1}, \ldots, \vec{b}_n\}$$

Dan is $\text{vect}\,(B_1) = V$. Bekijk nu

$$S_2 = B_1 \cup \{\vec{v}_2\} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{j-1}, \vec{b}_{j+1}, \ldots, \vec{b}_n\}$$

Dan is $\text{vect}\,(S_2) = V$; en S_2 is lineair afhankelijk, omdat $\vec{v}_2$ een lineaire combinatie is van de overige. Dus is één van de vectoren in S_2 een lineaire combinatie van de vorige. Dit kan niet $\vec{v}_1$ of

$\vec{v}_2$ zijn, omdat $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ lineair onafhankelijk is. Dus is het één van de overblijvende $\vec{b}_i$'s. Schrap deze. We bekomen dan een voortbrengende verzameling B_2 bestaande uit $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ en $n-2$ vectoren uit B.
Indien $r > n$, dan kunnen we dit procédé n keer herhalen. We krijgen dan dat

$$B_n = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$$

voortbrengend is. Maar dan is $\vec{v}_{n+1}$ een lineaire combinatie van $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, en dus is S lineair afhankelijk. Dit is strijdig met de onderstelling, en dus moet $r \leq n$. □

Stelling 1.4.7. *Als $B_1 = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ en $B_2 = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_m\}$ twee basissen zijn van de vectorruimte V, dan is $n = m$. Alle basissen hebben dus hetzelfde aantal elementen.*

Bewijs. B_1 is lineair onafhankelijk en B_2 is een basis, dus $n \leq m$, door voorgaande stelling. Op dezelfde manier is $m \leq n$ omdat B_2 lineair onafhankelijk is en B_1 een basis. □

Definitie 1.4.8. *De **dimensie** van een eindigdimensionale $\mathbb{K}$-vectorruimte V is het aantal elementen n in een basis van V. We noteren dit*

$$\dim(V) = \dim_{\mathbb{K}}(V) = n$$

De index $\mathbb{K}$ wordt weggelaten indien er geen verwarring mogelijk is.

Voorbeelden 1.4.9. 1) $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n$. Inderdaad, de standaardbasis

$$\{(1,0,\ldots,0), (0,1,\ldots,0), \ldots, (0,0,\ldots,1)\}$$

bevat n elementen.
2) $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = 1$. Inderdaad, $\{1\}$ is een basis voor $\mathbb{K}$.
3) $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$. Inderdaad, $\{1, i\}$ is een basis van $\mathbb{C}$ over $\mathbb{R}$. Wat is $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$?
4) $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$. Inderdaad, de verzameling

$$\{1, X, X^2, X^3, \ldots, X^n\}$$

is een basis (ga dit zelf na).

Gevolg 1.4.10. *Onderstel dat $\dim(V) = n$. Als B een maximaal lineair onafhankelijk deel van V is, dan is B een basis, en dan bevat B juist n elementen.*

Bewijs. Onderstel $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k\}$. We moeten bewijzen dat B voortbrengend is. Indien B niet voortbrengend is, dan bestaat er een vector $\vec{v}$ die geen lineaire combinatie is van de vectoren in B. Dan is in

$$B' = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k, \vec{v}\}$$

geen enkele vector een lineaire combinatie van de vorige, en dus is B' lineair onafhankelijk. Maar dit is strijdig met het feit dat B een maximaal stel lineair onafhankelijke vectoren was. Derhalve moet B voortbrengend zijn, en dus is B een basis, en dan is het aantal elementen in B juist n. □

Gevolg 1.4.11. *Als* $\dim(V) = n$*, en* $\mathrm{vect}(B) = V$*, dan bevat B tenminste n vectoren.*

Bewijs. Als B een voortbrengend stel voor V is, dan bevat B een basis voor V (cf. stelling 1.4.4), en deze basis bestaat uit n elementen (stelling 1.4.7). Dus bevat B tenminste n elementen. ☐

Gevolg 1.4.12. *Onderstel* $\dim(V) = n$*, en* $B \subset V$ *bestaande uit m elementen.*

$$\begin{aligned} m < n &\implies B \text{ niet voortbrengend} \\ m > n &\implies B \text{ lineair afhankelijk} \end{aligned}$$

Bewijs. Door contrapositie uit gevolg 1.4.11 en lemma 1.4.6. ☐

We zagen reeds dat elk voortbrengend stel vectoren van V kan beperkt worden tot een basis. In de volgende stelling zullen we bewijzen dat elke lineair onafhankelijke verzameling kan aangevuld worden tot een basis van V.

Stelling 1.4.13. *Onderstel dat* $\dim(V) = n$*, en* $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\} \subset V$ *lineair onafhankelijk. Dan bestaat er een basis B van V die S bevat.*

Bewijs. Neem een basis $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ van V. Uit lemma 1.4.6 volgt dat $m \leq n$. Bekijk nu

$$S_1 = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m, \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$$

Dan is $\mathrm{vect}(S_1) = V$, en S_1 kan beperkt worden tot een basis; de procedure hiervoor die geschetst werd in het bewijs van stelling 1.4.4 is de volgende: men neemt de eerste vector in de rij die een lineaire combinatie is van de vorige, en men laat deze weg. Dan neemt men uit de overblijvende vectoren weer de eerste die een lineaire combinatie is van de vorige, en men laat deze weer weg. Aangezien S lineair onafhankelijk is, wordt bij geen enkele stap één van de vectoren $\vec{v}_i$ weggelaten. Men bekomt dus uiteindelijk een basis B die S bevat. ☐

Stelling 1.4.14. *Onderstel dat* $\dim(V) = n$*, en dat* $B \subset V$ *bestaat uit n elementen. Dan hebben we*

1. *B lineair onafhankelijk* $\implies$ *B basis voor V;*
2. $\mathrm{vect}(B) = V \implies$ *B basis voor V;*

met andere woorden, voor een stel van n vectoren volstaat het één van de twee voorwaarden uit de definitie te controleren, om na te gaan of het stel een basis vormt.

Bewijs. Onderstel eerst dat B lineair onafhankelijk is. Indien B niet voortbrengend is, dan bestaat een vector $\vec{v}$ die geen lineaire combinatie van de vectoren uit B is. Dan is $B \cup \{\vec{v}\}$ een lineair onafhankelijk stel van $n+1$ elementen, en dit is strijdig met gevolg 1.4.12. Dus is B voortbrengend en daardoor ook een basis.
Onderstel dat B voortbrengend is. Als B niet lineair onafhankelijk is, dan is één van de vectoren van B een lineaire combinatie van de overige. Als we deze schrappen, dan houden we een voortbrengende verzameling met $n-1$ elementen over. Dit is weerom strijdig met gevolg 1.4.12. Dus B moet lineair onafhankelijk zijn, en dus is B een basis. ☐

Voorbeeld 1.4.15. We werken in de vectorruimte $V = \mathbb{R}^3$. Bekijk

$$B = \{\vec{a} = (1,2,3), \vec{b} = (1,0,1), \vec{c} = (2,3,4)\}$$

Aangezien $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ volstaat het na te gaan dat B lineair onafhankelijk is, om te kunnen besluiten dat B een basis is.
Onderstel dat

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$$

Dan geldt

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta + 4\gamma = 0 \end{cases}$$

Dit lineair stelsel in α, β, γ heeft enkel $\alpha = \beta = \gamma = 0$ als oplossing. Dus is B lineair onafhankelijk en dus een basis.

Stelling 1.4.16. *Onderstel V eindigdimensionaal en W een deelruimte van V. Dan is W ook eindigdimensionaal, en $\dim(W) \leq \dim(V)$. Als $\dim(W) = \dim(V)$, dan is noodzakelijkerwijze $V = W$.*

Bewijs. Onderstel dat $\dim(V) = n$. Als W oneindigdimensionaal, dan kan aan elk eindig stel lineair onafhankelijke vectoren in W steeds een vector toegevoegd worden, met behoud van lineaire onafhankelijkheid. Inderdaad, anders is dit stel ook voortbrengend, en dan is het een basis. Op die manier kunnen we dus een lineair onafhankelijk stel met een willekeurig groot aantal vectoren erin construeren. Maar het is onmogelijk dat V, en dus ook W, een lineair onafhankelijk stel van meer dan n lineair onafhankelijke vectoren bevat. Dus is noodzakelijkerwijze W eindigdimensionaal. Neem een basis voor W. De vectoren in die basis zijn lineair onafhankelijk in W en dus ook in V. Hun aantal is dus maximaal $n = \dim(V)$, en dus $\dim(W) \leq \dim(V)$.
Indien $\dim(W) = \dim(V) = n$, dan bevat een basis B van W n vectoren. Deze zijn lineair onafhankelijk, en vormen dus ook een basis voor V, vanwege stelling 1.4.13. Dus is $W = \mathrm{vect}(B) = V$. $\square$

1.5 De eerste dimensiestelling

Onderstel dat W_1 en W_2 twee eindigdimensionale deelruimten zijn van een vectorruimte V. We hebben gezien dat $W_1 \cap W_2$ en $W_1 + W_2$ ook deelruimten zijn. We weten ook (stelling 1.4.16) dat $W_1 \cap W_2$ eindigdimensionaal is. De bedoeling van deze paragraaf is om aan te tonen dat ook $W_1 + W_2$ eindigdimensionaal is, en een formule op te stellen die het verband geeft tussen de dimensies van W_1, $W_2, W_1 \cap W_2$ en $W_1 + W_2$. Eerst hebben we het volgende eenvoudig resultaat nodig:

Stelling 1.5.1. *Onderstel dat W een eindigdimensionale vectorruimte is met basis $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$. Neem $1 \leq k \leq n$, en stel*

$$\begin{cases} W_1 = \mathrm{vect}\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k\} \\ W_2 = \mathrm{vect}\{\vec{b}_{k+1}, \ldots, \vec{b}_n\} \end{cases}$$

Dan is $W = W_1 \oplus W_2$.

Bewijs. Het is duidelijk dat $W_1 + W_2 = \text{vect}\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\} = W$. We moeten dus enkel aantonen dat $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$, en dit gaat als volgt : onderstel dat $\vec{x} \in W_1 \cap W_2$. Dan is

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{b}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{b}_k = \alpha_{k+1}\vec{b}_{k+1} + \cdots + \alpha_n\vec{b}_n$$

voor zekere coëfficiënten $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Dan is

$$\alpha_1\vec{b}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{b}_k - \alpha_{k+1}\vec{b}_{k+1} - \cdots - \alpha_n\vec{b}_n = \vec{0}$$

en dus zijn alle $\alpha_i = 0$, omdat de $\vec{b}_i$'s lineair onafhankelijk zijn. Dus is $\vec{x} = \vec{0}$. □

In de situatie van stelling 1.5.1 hebben we dat $\dim(W_1) = k$ en $\dim(W_2) = n - k$. Dus geldt dat $\dim(W_1) + \dim(W_2) = \dim(W)$. In de volgende stelling zullen we zien dat deze formule altijd geldt voor een directe som van vectorruimten.

Stelling 1.5.2. *Onderstel dat W_1 en W_2 twee eindigdimensionale deelruimten van W zijn en dat $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$. Dan is*

$$\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$$

Bewijs. Onderstel dat

$$B_1 = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$$

een basis is voor W_1, en dat

$$B_2 = \{\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_m\}$$

een basis is voor W_2. Dan is $\dim(W_1) = n,\ \dim(W_2) = m$. Het volstaat nu om aan te tonen dat

$$B_1 \cup B_2 = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n, \vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_m\}$$

een basis is voor $W_1 \oplus W_2$. Het is duidelijk dat $B_1 \cup B_2$ een voortbrengend stel is:

$$\text{vect}(B_1 \cup B_2) = \text{vect}(B_1) + \text{vect}(B_2) = W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$$

Bovendien is $B_1 \cup B_2$ lineair onafhankelijk: indien

$$\alpha_1\vec{b}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{b}_n + \beta_1\vec{c}_1 + \cdots + \beta_m\vec{c}_m = \vec{0}$$

dan is

$$\alpha_1\vec{b}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{b}_n = -\beta_1\vec{c}_1 - \cdots - \beta_m\vec{c}_m$$

gelegen in $W_1 \cap W_2$. Dus is

$$\alpha_1\vec{b}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{b}_n = -\beta_1\vec{c}_1 - \cdots - \beta_m\vec{c}_m = \vec{0}$$

Omdat B_1 en B_2 lineair onafhankelijke verzamelingen zijn, moeten daarom alle coëfficiënten α_i en β_j nul zijn. Dus is $B_1 \cup B_2$ lineair onafhankelijk. □

Stelling 1.5.3. (Eerste dimensiestelling)
Onderstel dat W_1 en W_2 twee eindigdimensionale deelruimten van een vectorruimte V zijn. Dan geldt volgende formule:

$$\dim(W_1) + \dim(W_2) = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$$

Bewijs. We hebben al opgemerkt dat $W_1 \cap W_2$ eindigdimensionaal is. Neem een basis

$$B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k\}$$

van $W_1 \cap W_2$. Vul deze basis aan tot een basis

$$B' = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k, \vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_m\}$$

van W_1 (gebruik stelling 1.4.13). Stel nu

$$X = \text{vect}\{\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_m\}$$

We weten dan uit stelling 1.5.1 dat

$$W_1 = X \oplus (W_1 \cap W_2) \tag{1.16}$$

We beweren nu dat

$$W_1 + W_2 = X \oplus W_2 \tag{1.17}$$

Aangezien

$$W_1 + W_2 = X + (W_1 \cap W_2) + W_2 = X + W_2$$

($W_1 \cap W_2 \subset W_2$), volstaat het te bewijzen dat

$$X \cap W_2 = \{\vec{0}\}$$

Dit gaat als volgt: neem $\vec{x} \in X \cap W_2$. Dan is $\vec{x} \in X \subset W_1$ en $\vec{x} \in W_2$, zodat

$$\vec{x} \in W_1 \cap W_2$$

en

$$\vec{x} \in X \cap (W_1 \cap W_2) = \{\vec{0}\}$$

Dit bewijst (1.17). We combineren nu alle gegevens, gebruik makende van stelling 1.5.2: (1.16) vertelt ons dat

$$\dim(W_1) = \dim(X) + \dim(W_1 \cap W_2)$$

en uit (1.17) volgt dat

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(X) + \dim(W_2)$$

Eliminatie van $\dim(X)$ geeft onmiddellijk de gevraagde formule. □

Hoofdstuk 2

Lineaire Afbeeldingen en Matrices

2.1 Lineaire afbeeldingen

Definitie 2.1.1. *Neem twee vectorruimten V en W, en een functie $f:\ V \to W$. We noemen f een **lineaire afbeelding** of **homomorfisme** indien voldaan is aan een van de volgende equivalente eigenschappen:*

1. $f(\vec{a}+\vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$ *en* $f(\alpha\vec{a}) = \alpha f(\vec{a})$*, voor elke* $\vec{a},\vec{b} \in V$ *en* $\alpha \in \mathbb{K}$*;*
2. $f(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}) = \alpha f(\vec{a}) + \beta f(\vec{b})$*, voor elke* $\vec{a},\vec{b} \in V$ *en* $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$*;*
3. $f(\sum_{i=1}^n \alpha_i\vec{a}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(\vec{a}_i)$*, voor elke* $\vec{a}_i \in V,\ \alpha_i \in \mathbb{K}$*.*

Een lineaire afbeelding is dus een afbeelding die lineaire combinaties omzet in lineaire combinaties. Ze bewaart de optelling en de scalaire vermenigvuldiging.

Voorbeelden 2.1.2. 1) $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door

$$f(a,b,c) = (a,b).$$

2) $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = mx,$$

waarbij m een vast gegeven getal is. Elke lineaire afbeelding $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is van deze vorm. Inderdaad, onderstel $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineair. Dan is

$$f(x) = f(x.1) = f(1)x,$$

voor elke $x \in \mathbb{R}$.

3) $f:\ \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{n-1}[X]$ gedefinieerd door

$$f(P) = P'.$$

4) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door

$$f(x,y) = (\cos(\theta)x - \sin(\theta)y, \sin(\theta)x + \cos(\theta)y),$$

waarbij $\theta \in \mathbb{R}$ gegeven is. Meetkundig gezien is f een rotatie om de oorsprong $(0,0)$ over de hoek θ in het xy-vlak.

5) $f: \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(P) = \int_a^b P(x)\mathrm{d}x$$

voor elke veelterm P, waarbij $a, b \in \mathbb{R}$ gegeven zijn.

6) Onderstel dat V een vectorruimte is, en noteer $1_V: V \to V$ voor de **identieke afbeelding**. Deze wordt gedefinieerd door $1_V(\vec{v}) = \vec{v}$, voor elke $\vec{v} \in V$. 1_V is steeds een lineaire afbeelding.

Stelling 2.1.3. *Onderstel dat $f: V \to W$ lineair is. Dan is $f(\vec{0}) = \vec{0}$.*

Stelling 2.1.4. *Onderstel dat $f: V \to W$ en $g: W \to X$ lineaire afbeeldingen zijn. Dan is $g \circ f: V \to X$ ook een lineaire afbeelding.*

Stelling 2.1.5. *Onderstel dat $f,\ g: V \to W$ lineaire afbeeldingen zijn, en dat $\alpha \in \mathbb{K}$. Dan zijn de afbeeldingen $f+g$ en αf, gedefinieerd door*

$$f + g : V \to W : \vec{a} \mapsto f(\vec{a}) + g(\vec{a})$$

en

$$\alpha f : V \to W : \vec{a} \mapsto \alpha f(\vec{a})$$

ook lineaire afbeeldingen.

Bewijs. Bewijs zelf als oefening de drie bovenstaande stellingen. $\square$

Stelling 2.1.6. *Onderstel dat $V = V_1 \oplus V_2$ de directe som van twee deelruimten van een vectorruimte is. Dan is de afbeelding $f: V \to V_1$ gedefinieerd door*

$$f(\vec{v}) = \vec{v}_1$$

indien $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, met $\vec{v}_1 \in V_1$ en $\vec{v}_2 \in V_2$ een lineaire afbeelding, die voldoet aan de eigenschap

$$f \circ f = f.$$

*We noemen f de **projectie** van V op V_1 **evenwijdig** met V_2.*

Bewijs. Voor $\vec{v} \in V$ is de ontbinding $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, met $\vec{v}_1 \in V_1$ en $\vec{v}_2 \in V_2$ uniek, zodat de afbeelding f welgedefinieerd is. f is lineair: als $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ en $\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$, met $\vec{v}_1,\ \vec{w}_1 \in V_1$ en $\vec{v}_2,\ \vec{w}_2 \in V_2$, dan is

$$\vec{v} + \vec{w} = (\vec{v}_1 + \vec{w}_1) + (\vec{v}_2 + \vec{w}_2),$$

zodat

$$f(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{v}_1 + \vec{w}_1 = f(\vec{v}) + f(\vec{w}).$$

Tenslotte is

$$f(\alpha\vec{v}) = f(\alpha\vec{v}_1 + \alpha\vec{v}_2) = \alpha\vec{v}_1 = \alpha f(\vec{v}).$$

$\square$

2.2 Kern en beeld van een lineaire afbeelding

Definitie 2.2.1. *Voor een lineaire afbeelding $f: V \to W$ tussen twee vectorruimten V en W noteren we*

$$\operatorname{Ker}(f) = f^{-1}\{\vec{0}\} = \{\vec{x} \in V \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\} \tag{2.1}$$
$$\operatorname{Im}(f) = f(V) = \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in V\} \tag{2.2}$$

We noemen $\operatorname{Ker}(f)$ *de* ***kern*** *en* $\operatorname{Im}(f)$ *het* ***beeld*** *van de lineaire afbeelding f.*

Stelling 2.2.2. $\operatorname{Ker}(f)$ *is een deelruimte van V en* $\operatorname{Im}(f)$ *is een deelruimte van W.*

Bewijs. Als $\vec{a},\vec{b} \in \operatorname{Ker}(f)$ en $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$, dan is

$$f(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = \alpha f(\vec{a}) + \beta f(\vec{b}) = \vec{0}$$

en hieruit volgt dat ook $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \in \operatorname{Ker}(f)$. Op analoge manier kunnen we aantonen dat een lineaire combinatie van twee vectoren in het beeld van f nog steeds in het beeld van f ligt. ☐

In de volgende stelling zullen we injectieve lineaire afbeeldingen karakteriseren aan de hand van hun kern. Herhaal dat een afbeelding $f: A \to B$ tussen twee verzamelingen **injectief** genoemd wordt als geldt dat geen twee verschillende elementen van A hetzelfde beeld kunnen hebben:

$$\forall a,\ a' \in A:\ f(a) = f(a') \implies a = a'.$$

Stelling 2.2.3. *Voor een lineaire afbeelding $f: V \to W$ zijn de volgende uitspraken equivalent:*

1. *f is injectief;*
2. $\operatorname{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$*;*
3. *Het beeld onder f van een stel lineair onafhankelijke vectoren in V is lineair onafhankelijk in W.*

Bewijs. 1. ⇒ 2. is duidelijk, aangezien $f(\vec{x}) = \vec{0} = f(\vec{0})$ per definitie impliceert dat $\vec{x} = \vec{0}$.
2. ⇒ 1. Onderstel dat $\operatorname{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$. Als $f(\vec{a}) = f(\vec{b})$, dan is $f(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{0}$, en dus $\vec{a} - \vec{b} \in \operatorname{Ker}(f)$, en $\vec{a} = \vec{b}$.
2. ⇒ 3. Onderstel dat $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ lineair onafhankelijk is in V. Als nu

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\vec{a}_i) = \vec{0}$$

dan geldt, vanwege de lineariteit van f dat

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{a}_i\Big) = \vec{0},$$

zodat

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{a}_i = \vec{0}$$

want $\operatorname{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$. Maar dan moet

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$

omdat de $\vec{a}_i$ lineair onafhankelijk zijn. Dus is $\{f(\vec{a}_1), \ldots, f(\vec{a}_n)\}$ lineair onafhankelijk in W.
3. $\Rightarrow$ 2. Onderstel dat het beeld van een lineair onafhankelijk stel vectoren in V lineair onafhankelijk is in W. Neem $\vec{a} \neq \vec{0}$. Dan is $\{\vec{a}\}$ lineair onafhankelijk in V, en dus $\{f(\vec{a})\}$ lineair onafhankelijk in W, en $f(\vec{a}) \neq \vec{0}$. A fortiori $\operatorname{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$. □

Een afbeelding $f : A \to B$ wordt **surjectief** genoemd indien elk element van B het beeld is van een element uit A:

$$\forall b \in B,\ \exists a \in A\ :\ f(a) = b$$

Voor surjectieve lineaire afbeeldingen hebben we een eigenschap die analoog is aan stelling 2.2.3:

Stelling 2.2.4. *Voor een lineaire afbeelding $f : V \to W$ zijn de volgende uitspraken equivalent:*

1. *f is surjectief;*
2. $\operatorname{Im}(f) = W$*;*
3. *Als* $\operatorname{vect}(A) = V$*, dan is* $\operatorname{vect}(f(A)) = W$.

Bewijs. 1. $\Leftrightarrow$ 2. is triviaal
2. $\Leftrightarrow$ 3. volgt uit de volgende redenering: voor $A \subset V$ geldt

$$\begin{aligned}
\operatorname{vect}(f(A)) &= \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\vec{a}_i) \mid n \in \mathbb{N}_0, \alpha_i \in \mathbb{K},\ \vec{a}_i \in A\} \\
&= \{f\big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{a}_i\big) \mid n \in \mathbb{N}_0, \alpha_i \in \mathbb{K},\ \vec{a}_i \in A\} \\
&= f(\operatorname{vect}(A)),
\end{aligned}$$

zodat f surjectief en $\operatorname{vect}(A) = V$ impliceren dat $\operatorname{vect}(f(A)) = f(V) = W$. Omgekeerd, als $\operatorname{vect}(A) = V$ impliceert dat $\operatorname{vect}(f(A)) = W$, dan volgt uit $\operatorname{vect}(V) = V$ dat $f(V) = \operatorname{vect}(f(V)) = W$. □

Een afbeelding die tegelijkertijd injectief en surjectief is wordt **bijectief** genoemd. Men kan aantonen dat $f : A \to B$ een bijectie is als en slechts als er een afbeelding $g : B \to A$ bestaat zodanig dat $g \circ f = 1_A$ en $f \circ g = 1_B$. We noteren dan $g = f^{-1}$, en noemen g de **inverse** van f. Merk op dat voor $a \in A,\ b \in B$ geldt:

$$f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b \tag{2.3}$$

Definitie 2.2.5. *Een bijectieve lineaire afbeelding noemen we ook een* ***isomorfisme****. Als er een isomorfisme bestaat tussen twee vectorruimten V en W dan zeggen we dat deze twee vectorruimten* ***isomorf*** *zijn, en we noteren dit door $V \cong W$.*

Stelling 2.2.6. *Als $f : V \to W$ een isomorfisme is, dan is het beeld van elke basis van V een basis van W. Bijgevolg hebben (eindigdimensionale) isomorfe vectorruimten dezelfde dimensie.*

Bewijs. Dit volgt onmiddellijk uit de twee voorgaande stellingen 2.2.3 en 2.2.4. □

Stelling 2.2.7. *Als $f : V \to W$ een isomorfisme is, dan is ook de inverse afbeelding $f^{-1} : W \to V$ een isomorfisme.*

Bewijs. We hoeven enkel aan te tonen dat f^{-1} lineair is: voor elke $\alpha,\ \beta \in \mathbb{K}$ en $\vec{w}_1,\ \vec{w}_2 \in W$ hebben we

$$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2) &= f^{-1}\big(\alpha f(f^{-1}(\vec{w}_1)) + \beta f(f^{-1}(\vec{w}_2))\big) \\ &= f^{-1}\big(f\big(\alpha f^{-1}(\vec{w}_1) + \beta f^{-1}(\vec{w}_2)\big)\big) \\ &= \alpha f^{-1}(\vec{w}_1) + \beta f^{-1}(\vec{w}_2). \end{aligned}$$

□

Stelling 2.2.8. *Als $f : V \to W$ en $g : W \to X$ isomorfismen zijn, dan is ook $g \circ f : V \to X$ een isomorfisme.*

Bewijs. Oefening □

Stelling 2.2.9. *Voor elke vectorruimte V is $1_V : V \to V$ een isomorfisme.*

Bewijs. Oefening □

Merk op dat de drie voorgaande eigenschappen ons vertellen dat de relatie "is isomorf met" een equivalentierelatie is.

Onderstel nu dat V een eindigdimensionale vectorruimte is, met basis

$$E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$$

We zullen vanaf nu impliciet aannemen dat de volgorde van de elementen van E vastligt — in principe was dit tot nu toe niet zo, aangezien E een verzameling is — en E een **geordende basis** noemen.

Bekijk nu de volgende afbeelding $f : V \to \mathbb{K}^n$. Voor elke $\vec{v} \in V$ bestaat er een uniek n-tal $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ zodanig dat

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i$$

We stellen

$$f(\vec{v}) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

en noemen $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de **coördinaten** van $\vec{v}$ ten opzichte van de geordende basis E. Om redenen die verderop duidelijk zullen worden, noteren we de elementen van het n-tal $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ soms liever in een kolom:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

We zullen ook volgende notatie gebruiken:

$$f(\vec{v}) = [\vec{v}]_E = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Stelling 2.2.10. *Voor elke n-dimensionale vectorruimte V met geordende basis E geldt dat*

$$[\bullet]_E : V \longrightarrow \mathbb{K}^n : \vec{v} \mapsto [\vec{v}]_E$$

een isomorfisme is.

Bewijs. Oefening. □

Stelling 2.2.10 heeft als belangrijk gevolg dat de eindigdimensionale vectorruimten op isomorfisme na door hun dimensie geklasseerd worden:

Gevolg 2.2.11. *Als* $\dim(V) = \dim(W) = n$*, dan is*

$$V \cong W \cong \mathbb{K}^n.$$

We hebben gezien dat het bestaan van een isomorfisme $f : V \to W$ impliceert dat V en W dezelfde dimensie hebben. Wat kunnen we zeggen als er gewoon een lineaire afbeelding $f : V \to W$ gegeven is? Het antwoord wordt gegeven door de volgende stelling, ook bekend als de tweede dimensiestelling:

Stelling 2.2.12. (Tweede dimensiestelling) *Onderstel dat V een eindigdimensionale vectorruimte is, en $f : V \to W$ lineair. Dan is*

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V).$$

Bewijs. Omdat V eindigdimensionaal is, weten we dat ook $\mathrm{Ker}(f)$ eindigdimensionaal is (cf. stelling 1.4.16). Neem een basis $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ van $\mathrm{Ker}(f)$, en vul deze aan tot een basis

$$\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}, \ldots, \vec{v}_n\}$$

van V (stelling 1.4.13). Stel nu $X = \mathrm{vect}\{\vec{v}_{k+1}, \ldots, \vec{v}_n\}$, dan geldt vanwege stelling 1.5.1 dat

$$V = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus X$$

Bekijk nu de beperking van de functie f tot X:

$$g = f_{|X} : X \to \mathrm{Im}\,(f)$$

We beweren dat g een isomorfisme is:
g is injectief: voor elke $\vec{x} \in X$ geldt:

$$\begin{aligned} g(\vec{x}) = \vec{0} &\implies f(\vec{x}) = \vec{0} \\ &\implies \vec{x} \in \mathrm{Ker}\,(f) \cap X = \{\vec{0}\}, \end{aligned}$$

en dus is $\mathrm{Ker}\,(g) = \{\vec{0}\}$.
g is surjectief: neem $\vec{y} \in \mathrm{Im}\,(f)$. Dan bestaat er een $\vec{x} \in V$ zodanig dat $f(\vec{x}) = \vec{y}$. Als we zouden weten dat $\vec{x} \in X$, dan is het gestelde bewezen. In het algemeen is $\vec{x} \notin X$, maar wel hebben we dat $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ met $\vec{x}_1 \in \mathrm{Ker}\,(f)$ en $\vec{x}_2 \in X$. Hieruit volgt dat

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2) = f(\vec{x}_2) = g(\vec{x}_2)$$

aangezien $\vec{x}_2 \in X$. Dit toont aan dat g surjectief is.
Uit het bovenstaande volgt nu dat

$$\dim\,(V) = \dim\,(\mathrm{Ker}\,(f)) + \dim\,(X) = \dim\,(\mathrm{Ker}\,(f)) + \dim\,(\mathrm{Im}\,(f)),$$

en dit bewijst onze stelling. □

Gevolg 2.2.13 (Stelling van het alternatief)**.** *Onderstel dat V en W vectorruimten zijn met* dezelfde *dimensie, en dat $f : V \to W$ een lineaire afbeelding is. Volgende eigenschappen zijn equivalent:*

1. *f is een isomorfisme;*
2. *f is injectief;*
3. *f is surjectief.*

Bewijs. 1. $\Rightarrow$ 2. en 1. $\Rightarrow$ 3. zijn triviaal.
2. $\Rightarrow$ 1. Als f injectief is, dan heeft $\mathrm{Ker}\,(f) = \{\vec{0}\}$ dimensie 0, en dan volgt uit voorgaande stelling dat

$$\dim\,(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim\,(V) = \dim\,(W)$$

en dus moet $\mathrm{Im}\,(f) = W$, vanwege stelling 1.4.16. Dus f is surjectief, en daardoor een isomorfisme.
3. $\Rightarrow$ 1. Als f surjectief is, dan is

$$\dim\,(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim\,(W) = \dim\,(V)$$

en dus is $\dim\,(\mathrm{Ker}\,(f)) = 0$ vanwege de vorige stelling. Maar dan is $\mathrm{Ker}\,(f) = \{\vec{0}\}$, en dus is f ook injectief, en daardoor een isomorfisme. □

We beëindigen deze paragraaf met enige terminologie — waarvan we verderop enkel de vetgedrukte woorden nog zullen gebruiken. Zoals reeds vermeld, wordt een lineaire afbeelding ook een *homomorfisme* genoemd. Een lineaire surjectie wordt ook *epimorfisme* genoemd, en een lineaire injectie een *monomorfisme*. Een *endomorfisme* is een lineaire afbeelding van een vectorruimte naar zichzelf, en een *automorfisme* een isomorfisme van een vectorruimte naar zichzelf. Een ander woord voor endomorfisme is **lineaire operator**. Een lineaire afbeelding die aankomt in $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$ (beschouwd als vectorruimten) heet een **lineaire vorm**.

2.3 De vectorruimte van de lineaire afbeeldingen

Onderstel dat V en W vectorruimten zijn. De verzameling van alle lineaire afbeeldingen van V naar W zullen we noteren door

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W) = \{f \in W^V \mid f \text{ is een lineaire afbeelding}\}$$

De index $\mathbb{K}$ wordt weggelaten indien er geen verwarring mogelijk is. Uit stelling 2.1.5 en stelling 1.2.2 volgt onmiddellijk dat

Stelling 2.3.1. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$ *is een deelruimte van* W^V.

In het vervolg zullen we een beschrijving geven van $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$ indien V en W eindigdimensionaal zijn.
Uit stelling 2.1.4 volgt dat de samenstelling van functies een afbeelding

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,X)$$

definieert, voor elk drietal vectorruimten V, W en X. Indien $V = W = X$, dan krijgen we dus een afbeelding

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)$$

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)$ voldoet aan de volgende eigenschappen:

1. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)$ is een vectorruimte;
2. $\circ$ is associatief;
3. $1_V \circ f = f \circ 1_V = f$, voor elke $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)$;
4. $\circ$ is distributief ten opzichte van $+$:

$$\begin{aligned} f\circ(g+h) &= (f\circ g)+(f\circ h) \\ (f+g)\circ h &= (f\circ h)+(g\circ h) \end{aligned}$$

   voor alle $f,\ g,\ h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)$.

We vatten deze eigenschappen samen door te zeggen dat $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)$ een $\mathbb{K}$-*algebra* is.

2.4 Matrices

De matrix van een lineaire afbeelding

Onderstel dat V en W vectorruimten zijn, en dat

$$E = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$$

een basis voor V is. Neem nu een lineaire afbeelding $f : V \to W$. We merken eerst op dat f volledig bepaald is door het geven van de beelden van de n basisvectoren. Inderdaad, als we

$$f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)$$

kennen, dan kennen we voor elke $\vec{v} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$ ook

$$f(\vec{v}) = \sum_{i=1}^n x_i f(\vec{e}_i)$$

Onderstel nu bovendien dat W eindigdimensionaal is, met basis

$$F = \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m\}$$

Elk van de n vectoren $f(\vec{e}_i)$ wordt gegeven door zijn m coördinaten ten opzichte van de basis F. De lineaire afbeelding f is dus volledig bepaald als we de m coördinaten van de beelden van de n basisvectoren van V kennen. We moeten dus in het totaal nm getallen kennen om de lineaire afbeelding f volledig te bepalen. We noteren deze mn getallen in een tabel met m rijen en n kolommen, waarbij we de volgende overeenkomst maken : in de i-de kolom van de tabel schrijven we de m coördinaten van het beeld van de i-de basisvector $\vec{e}_i$. We noemen deze tabel de **matrix** van de lineaire afbeelding f ten opzichte van de basissen E en F, en we noteren dit als volgt:

$$[f]_{F,E} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Formule (2.4) betekent dus dat, voor $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_i) &= a_{1i}\vec{f}_1 + a_{2i}\vec{f}_2 + \cdots + a_{mi}\vec{f}_m \\ &= \sum_{j=1}^m a_{ji}\vec{f}_j \end{aligned} \tag{2.5}$$

en dus, voor $\vec{v} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$

$$f(\vec{v}) = \sum_{i=1}^n x_i f(\vec{e}_i)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \vec{f}_j \\ &= \sum_{j=1}^{m} \big(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i\big) \vec{f}_j \end{aligned} \tag{2.6}$$

De coördinaten van $f(\vec{v})$ zijn dus

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Met andere woorden als we de coördinaten van $\vec{v}$ noteren door de kolommatrix X, en de matrix $[f]_{F,E}$ van de lineaire afbeelding f door A, dan worden de coördinaten van $f(\vec{v})$ gegeven door AX. We hebben dus volgende formule:

$$[f(\vec{v})]_F = [f]_{F,E}[\vec{v}]_E.$$

We hebben de coördinaten van $\vec{v}$ hier geschreven als een kolom, die we ook als een matrix kunnen beschouwen (een matrix met slechts één kolom). Als we overeenkomen dat we matrices door hoofdletters zullen voorstellen, dan rechtvaardigt dit de notatie X voor de coördinaten van $\vec{v}$.
Het product van de matrices A en X wordt dan per definitie gegeven door (2.7). Verderop zullen we deze definitie veralgemenen.
De matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

wordt een $m \times n$-matrix genoemd (m rijen en n kolommen). Het is de gewoonte om als eerste index de rij-index te nemen, en als tweede index de kolomindex. De verzameling van alle $m \times n$ matrices wordt als volgt genoteerd:

$$\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ is een } m \times n \text{ matrix met elementen uit } \mathbb{K}\}$$

De vermelding $(\mathbb{K})$ wordt soms weggelaten, indien er geen verwarring mogelijk is. Een andere veelgebruikte notatie hiervoor is $\mathbb{K}^{m \times n}$.
Indien f en g twee lineaire afbeeldingen zijn, met matrices A en B, met elementen respectievelijk a_{ij} en b_{ij}, dan is het gemakkelijk om aan te tonen dat de matrix van de lineaire afbeelding $f + g$ $a_{ij} + b_{ij}$ als elementen heeft. Op dezelfde manier zien we dat de matrix van αf als elementen αa_{ij} heeft. Vandaar de volgende definitie voor de som en de scalaire vermenigvuldiging van $m \times n$-matrices:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

en

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Met deze notaties hebben we de volgende eigenschap:

Stelling 2.4.1. $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *is een vectorruimte, en de afbeelding*

$$[\bullet]_{F,E} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W) \longrightarrow \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

is een isomorfisme. Bovendien geldt dat

$$\dim(\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K})) = \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)) = mn.$$

Bewijs. Bewijs zelf als oefening dat $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ een vectorruimte is. Hierboven toonden we reeds aan dat $[\bullet]_{F,E}$ lineair en bijectief is. Laten we tenslotte een basis zoeken voor $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
Neem voor E_{ij} de matrix die op plaats (i,j) een 1 staan heeft, en een 0 op alle andere plaatsen:

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} & \text{kolom } j \\ \text{rij } i & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Voor een matrix $A = (a_{ij})$ hebben we nu dat

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$$

zodat $\{E_{ij} \mid i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n\}$ $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ voortbrengt. Het is gemakkelijk te bewijzen dat de E_{ij} ook lineair onafhankelijk zijn. □

Voorbeelden 2.4.2. 1) Een lineaire afbeelding $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ is volledig gegeven door het beeld van $1 \in \mathbb{R}$, aangezien $f(\alpha) = \alpha f(1)$, voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$. Als $f(1) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, dan is de matrix van f ten opzichte van de basissen $\{1\}$ en de standaardbasis $\{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\}$ de kolomvector

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}.$$

2) Onderstel dat $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ een basis is van de vectorruimte V. De matrix van een lineaire afbeelding

$$f:\ V \longrightarrow \mathbb{R}$$

ten opzichte van de basissen E en $\{1\}$ wordt gegeven door de rijvector

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

waarbij $a_i = f(\vec{e}_i)$.

3) Beschouw de vectorruimte $\mathbb{R}^2$, en identificeer deze met het vlak door middel van een (orthonormaal) assenstelsel. Wat is de matrix van de rotatie f van het vlak rond de oorsprong over een hoek θ? Met behulp van een tekening zien we gemakkelijk in dat

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1) &= \cos(\theta)\vec{e}_1 + \sin(\theta)\vec{e}_2 \\ f(\vec{e}_2) &= -\sin(\theta)\vec{e}_1 + \cos(\theta)\vec{e}_2. \end{aligned}$$

2.5 Het product van matrices

Onderstel dat V, W en X vectorruimten zijn, en dat $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, $F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_m\}$ en $G = \{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_r\}$ basissen zijn voor respectievelijk V, W en X. Beschouw twee lineaire afbeeldingen $f:\ V \to W$ en $g:\ W \to X$.

Onderstel verder dat

$$[f]_{F,E} = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

en

$$[g]_{G,F} = B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rm} \end{pmatrix}.$$

Zoals we reeds gezien hebben, is de samenstelling

$$g \circ f:\ V \longrightarrow X$$

een nieuwe lineaire afbeelding. Wat is de matrix van deze nieuwe lineaire afbeelding, m.a.w, wat is $[g \circ f]_{G,E}$?
Om deze vraag te beantwoorden moeten we de coördinaten kennen van de beelden van de basisvectoren van V. We weten dat (cf. (2.5))

$$f(\vec{e}_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \vec{f}_j$$

en, analoog,

$$g(\vec{f}_j) = \sum_{k=1}^{r} b_{kj} \vec{g}_k$$

waaruit volgt dat

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\vec{e}_i) &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{r} a_{ji} b_{kj} \vec{g}_k \\ &= \sum_{k=1}^{r} \Big(\sum_{j=1}^{m} b_{kj} a_{ji} \Big) \vec{g}_k \end{aligned}$$

Hiermee hebben we aangetoond dat $[g \circ f]_{G,E}$ de $r \times n$ matrix C is met elementen

$$c_{ki} = \sum_{j=1}^{m} b_{kj} a_{ji}$$

voor $k = 1, \ldots, r$, $i = 1, \ldots, n$. Vandaar de volgende definitie:

Definitie 2.5.1. *Onderstel dat $B \in \mathrm{M}_{r,m}(\mathbb{K})$ en $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, met elementen b_{kj} en a_{ji}, zoals hierboven. Per definitie is het **product** BA van de matrices B en A de $r \times n$ matrix met elementen*

$$c_{ki} = \sum_{j=1}^{m} b_{kj} a_{ji}$$

voor $k = 1, \ldots, r$, $i = 1, \ldots, n$.

We hebben dan ook onmiddellijk de eigenschap

Stelling 2.5.2. *Als V, W en X eindigdimensionale vectorruimten zijn met basissen respectievelijk E, F en G, en $f : V \to W$, $g : W \to X$ lineaire afbeeldingen zijn, dan geldt dat de matrix van de samenstelling $g \circ f$ gegeven wordt door het product van de matrices van g en van f:*

$$[g \circ f]_{G,E} = [g]_{G,F} [f]_{F,E}$$

Gevolg 2.5.3. *Het product van matrices is associatief.*

Bewijs. Twee bewijzen zijn mogelijk: ofwel past men stelling 2.5.2 toe, en beroept men zich op de associativiteit van de samenstelling van afbeeldingen, ofwel bewijst men de eigenschap rechtstreeks uit de definitie. □

Opmerkingen 2.5.4. 1) Merk op dat het product van een $m \times n$ en een $n' \times r$-matrix alleen gedefinieerd is als $n = n'$;

2) Men kan definitie 2.5.1 ook als volgt bekijken: om het element met indices k en i van het product van de matrices B en A te berekenen, neemt men de k-de rij van B, en men vermenigvuldigt deze met de i-de kolom van A.

3) Indien B en A beide $n \times n$-matrices zijn, dan is zowel BA als AB gedefinieerd. Beide producten zijn echter meestal niet gelijk, met andere woorden het product van matrices is *niet commutatief*. Dit blijkt uit het volgende eenvoudige voorbeeld:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

De eenheidsmatrix

Neem een n-dimensionale vectorruimte V met basis E, en bekijk de identiteit

$$1_V : V \to V$$

De matrix van deze afbeelding is

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{K})$$

I_n wordt de **eenheidsmatrix** genoemd, en voldoet aan:

$$I_n A = A I_n = A$$

De inverse van een matrix

Onderstel dat $g : V \to V$ een lineaire afbeelding is, waarbij V een n-dimensionale vectorruimte is met basis E. Dan is $A = [g]_{E,E} \in M_{n,n}(\mathbb{K})$.
Indien g een isomorfisme is, dan bestaat de inverse afbeelding $g^{-1} : V \to V$. De matrix van g^{-1} noemen we per definitie de **inverse** van de matrix A. We noteren deze

$$A^{-1} = [g^{-1}]_{E,E}$$

Aangezien $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = 1_V$, geldt:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

voor elke matrix A die de matrix is van een isomorfisme.
Omgekeerd, als er een $n \times n$-matrix B bestaat zodanig dat

$$AB = BA = I_n$$

dan is g een isomorfisme: neem voor h de lineaire afbeelding die B als matrix heeft, dan geldt:

$$g \circ h = h \circ g = 1_V$$

Definitie 2.5.5. *Een $n \times n$-matrix A wordt een* ***reguliere matrix*** *genoemd als deze de matrix is van een isomorfisme, of, equivalent, indien deze matrix een inverse bezit voor de vermenigvuldiging van matrices. Een matrix die niet regulier is wordt ook* ***singulier*** *genoemd.*

Het is duidelijk dat niet elke matrix regulier is, aangezien niet elke lineaire afbeelding een isomorfisme is! We zullen in een volgend hoofdstuk verdere karakteriseringen zien van reguliere matrices, en ook methoden om de inverse van een matrix te berekenen. Laten we alvast volgende eigenschappen bewijzen.

Stelling 2.5.6. *Als $A,\ B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ regulier zijn, dan is ook AB regulier. Verder is*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Bewijs. $ABB^{-1}A^{-1} = I_n$ en $B^{-1}A^{-1}AB = I_n$. □

Stelling 2.5.7. *Als $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ regulier is, en $B,\ C \in M_{nm}(\mathbb{K})$, dan geldt*

$$AB = AC \implies B = C$$

Bewijs. Als $AB = AC$, dan is $B = A^{-1}AB = A^{-1}AC = C$. □

Als A singulier is, dan is stelling 2.5.7 niet langer waar. Dit blijkt uit volgend voorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

voor elke $a,\ b \in \mathbb{K}$.

2.6 Verandering van basis

De overgangsmatrix

We beschouwen weer een n-dimensionale vectorruimte V. Onderstel nu dat twee verschillende geordende basissen E en E' van V gegeven zijn:

$$\begin{aligned} E &= \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\} \\ E' &= \{\vec{e}_1{}', \ldots, \vec{e}_n{}'\} \end{aligned}$$

Wat is dan het verband tussen de coördinaten van een vector $\vec{v}$ in de twee coördinatenstelsels? Om deze vraag te beantwoorden nemen we één van de basisvectoren $\vec{e}_j{}'$, en schrijven deze als een lineaire combinatie van de $\vec{e}_i$:

$$\vec{e}_j{}' = \sum_{i=1}^{n} m_{ij}\vec{e}_i$$

of, equivalent:

$$[\vec{e}_j{}']_E = \begin{pmatrix} m_{1j} \\ m_{2j} \\ \vdots \\ m_{nj} \end{pmatrix}$$

Neem $\vec{v} \in V$, en onderstel

$$[\vec{v}]_E = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad [\vec{v}]_{E'} = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix}$$

Dan is

$$\begin{aligned} \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i\vec{e}_i &= \sum_{j=1}^{n} a'_j\vec{e}_j{}' \\ &= \sum_{j=1}^{n} a'_j \sum_{i=1}^{n} m_{ij}\vec{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} m_{ij}a'_j\Big)\vec{e}_i \end{aligned}$$

zodat

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}a'_j \tag{2.8}$$

De matrix

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

wordt de **overgangsmatrix** genoemd. Met deze notatie kunnen we (2.8) herformuleren:

$$[\vec{v}]_E = M[\vec{v}]_{E'} \tag{2.9}$$

Op analoge manier kunnen we een matrix M' opstellen die toelaat om $[\vec{v}]_{E'}$ te berekenen als we $[\vec{v}]_E$ kennen. We zullen aantonen dat M' de inverse is van de matrix M. We hebben

$$\vec{e}_i = \sum_{k=1}^{n} m'_{ki}\vec{e}_k{}'$$

zodat

$$\begin{aligned}
\vec{e}_j{}' &= \sum_{i=1}^{n} m_{ij}\vec{e}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_{ij} \sum_{k=1}^{n} m'_{ki}\vec{e}_k{}' \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} m'_{ki} m_{ij}\Big)\vec{e}_k{}'
\end{aligned}$$

en

$$\sum_{i=1}^{n} m'_{ki} m_{ij} = \delta_{kj}$$

of

$$M'M = I_n$$

Op dezelfde manier kunnen we aantonen dat $MM' = I_n$. Hiermee hebben we volgende eigenschap bewezen:

Stelling 2.6.1. *Onderstel dat E en E' twee basissen zijn voor een eindigdimensionale vectorruimte V, en dat de elementen m_{ij} van de matrix M gegeven worden door de formule*

$$\vec{e}_j{}' = \sum_{i=1}^{n} m_{ij}\vec{e}_i$$

Dan is M regulier en voor elke $\vec{v} \in V$ hebben we dat

$$[\vec{v}]_E = M[\vec{v}]_{E'} \text{ en } [\vec{v}]_{E'} = M^{-1}[\vec{v}]_E$$

Opmerking 2.6.2. We kunnen de verandering van basis van E' naar E ook anders bekijken. Als we de lineaire afbeelding 1_V beschouwen, kunnen we haar matrix bepalen ten opzichte van de basissen E' en E. We krijgen dus $[1_V]_{E,E'}$ waarvoor geldt $[1_V(\vec{v})]_E = [1_V]_{E,E'}[\vec{v}]_{E'}$. Maar doordat 1_V de identieke afbeelding is, geldt $1_V(\vec{v}) = \vec{v}$ zodat $[\vec{v}]_E = [1_V]_{E,E'}[\vec{v}]_{E'}$. Hieruit volgt dat de matrix M van hierboven juist gelijk is aan $[1_V]_{E,E'}$. Inderdaad, in $[1_V]_{E,E'}$ zijn de kolommen de coördinaten van de beelden van de vectoren van de basis E' ten opzichte van de basis E. Vermits deze beelden gelijk zijn aan de vectoren van E', krijgen we juist m_{ij} op plaats (i, j) van $[1_V]_{E,E'}$.

We vinden analoog dat $M^{-1} = [1_V]_{E',E}$.

De overgangsformules voor de matrix van een lineaire afbeelding

We behouden de notaties van hierboven: V is een n-dimensionale vectorruimte met twee gegeven geordende basissen E en E'. Onderstel dat W een vectorruimte is met dimensie m, met basissen

$$\begin{aligned}
F &= \{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m\} \\
F' &= \{\vec{f}'_1, \ldots, \vec{f}'_m\}
\end{aligned}$$

en dat $f: V \to W$ een lineaire afbeelding is. Wat is nu het verband tussen de matrices $A = [f]_{F,E}$ en $A' = [f]_{F',E'}$?
Onderstel dat N de $m \times m$-matrix is met elementen n_{lk}, waarbij

$$\vec{f}_k{}' = \sum_{l=1}^{m} n_{lk} \vec{f}_l$$

Gebruik makend van stelling 2.6.1 vinden we, voor elke $\vec{v} \in V$ en $\vec{w} \in W$

$$\begin{aligned} [\vec{v}]_E &= M[\vec{v}]_{E'} \\ [\vec{w}]_{F'} &= N^{-1}[\vec{w}]_F \end{aligned}$$

zodat

$$\begin{aligned} [f(\vec{v})]_{F'} &= N^{-1}[f(\vec{v})]_F \\ &= N^{-1}A[\vec{v}]_E \\ &= N^{-1}AM[\vec{v}]_{E'} \end{aligned}$$

zodat

$$A' = N^{-1}AM$$

Samengevat:

Stelling 2.6.3. *Beschouw een lineaire afbeelding $f: V \to W$, en basissen E en E' van V en F en F' van W. Als de matrices M en N gegeven zijn door de formules*

$$\vec{e}_j{}' = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} \vec{e}_i \ \text{ en } \ \vec{f}_k{}' = \sum_{l=1}^{m} n_{lk} \vec{f}_l$$

dan is

$$[f]_{F',E'} = N^{-1}[f]_{F,E}M$$

Opmerking 2.6.4. Omgekeerd, indien A de matrix is van een lineaire afbeelding, en $M \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ en $N \in M_{m,m}(\mathbb{K})$ reguliere matrices zijn, dan zijn de matrices A en $N^{-1}AM$ de matrices van dezelfde lineaire afbeelding, maar ten opzichte van verschillende basissen. Schrijf zelf op welke nieuwe basissen E' en F' we moeten kiezen om $N^{-1}AM$ als nieuwe matrix te krijgen.

Opmerking 2.6.5. Bovenstaande formules kunnen ook overzichtelijk geschreven worden door de overgangsmatrices te noteren aan de hand van de matrices van de identieke afbeeldingen (zie opmerking 2.6.2):

$$[f]_{F',E'} = \left([1_W]_{F,F'}\right)^{-1} [f]_{F,E}[1_V]_{E,E'}$$

of

$$[f]_{F',E'} = [1_W]_{F',F}[f]_{F,E}[1_V]_{E,E'}$$

Gevolg 2.6.6. *Beschouw een lineaire afbeelding $f: V \to V$, en basissen E en E' van V. Als de matrix M gegeven wordt door de formule*

$$\vec{e}_j{}' = \sum_{i=1}^{n} m_{ij}\vec{e}_i$$

dan is

$$[f]_{E',E'} = M^{-1}[f]_{E,E}M$$

Voorbeeld 2.6.7. Onderstel dat $V = \mathbb{R}^n$ en $W = \mathbb{R}^m$, en dat E en F de standaardbasissen zijn van $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Schrijf

$$E' = \{E_1, \ldots, E_n\} \text{ en } F' = \{F_1, \ldots, F_m\}$$

waarbij de E_i en F_j kolomvectoren zijn. Dan is

$$M = \begin{pmatrix} E_1 & E_2 & \cdots & E_n \end{pmatrix} \text{ en } N = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \cdots & F_m \end{pmatrix}$$

Als $X \in \mathbb{R}^n$ een kolomvector is, dan is

$$[X]_E = X \text{ en } [X]_{E'} = M^{-1}X$$

Zij $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Als

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : X \mapsto AX$$

de afbeelding is die de kolomvector X afbeeldt op AX, dan is $[f]_{F,E} = A$, en

$$[f]_{F',E'} = N^{-1}AM$$

2.7 De rang van een matrix

Definitie 2.7.1. *Neem een lineaire afbeelding $f: V \to W$. De dimensie van het beeld $\mathrm{Im}(f)$ noemen we ook de* ***rang*** *van f:*

$$\mathrm{rg}(f) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(f))$$

De rang van de $m \times n$-matrix A is de rang van de lineaire afbeelding

$$m_A: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m : X \mapsto AX$$

Voor een $m \times n$-matrix A kunnen we de definitie als volgt herschrijven: noteer

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{pmatrix}$$

waarbij

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

de j-de kolom van A is. Dan is

$$\mathrm{Im}\,(m_A) = \mathrm{vect}\,\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \mathbb{K}^m$$

en dus is

$$\mathrm{rg}\,(A) = \dim\,(\mathrm{vect}\,\{A_1, A_2, \ldots, A_n\})$$

het maximaal aantal lineair onafhankelijke kolommen (in $\mathbb{K}^m$) onder de kolommen van A:

Stelling 2.7.2. *De rang van een matrix A is het maximaal aantal lineair onafhankelijke kolommen van A.*

Stelling 2.7.3. *Onderstel dat $f : V \to W$ een lineaire afbeelding is en dat E, F basissen zijn voor respectievelijk V en W. Als $A = [f]_{F,E}$, dan is*

$$\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(f)$$

Bewijs. Onderstel dat $\dim\,(V) = n$, $\dim\,(W) = m$. Dan is A een $m \times n$-matrix. Bekijk de coördinaatafbeelding

$$[\bullet]_E : V \to \mathbb{K}^n$$

Voor elke $\vec{v} \in V$ geldt dat

$$[f(\vec{v})]_F = A[\vec{v}]_E = m_A([\vec{v}]_E) \tag{2.10}$$

en dus beperkt $[\bullet]_E$ zich tot een afbeelding

$$g : \mathrm{Ker}\,(f) \to \mathrm{Ker}\,(m_A)$$

g is injectief, omdat $[\bullet]_E$ injectief is. g is ook surjectief: neem $X \in \mathrm{Ker}\,(m_A) \subset \mathbb{K}^n$, en $\vec{v} \in V$ zodat $[\vec{v}]_E = X$. Uit (2.10) volgt dan dat

$$[f(\vec{v})]_F = A[\vec{v}]_E = AX = 0$$

en dus is $f(\vec{v}) = \vec{0}$, en $\vec{v} \in \mathrm{Ker}\,(f)$. Aangezien

$$g(\vec{v}) = [\vec{v}]_E = X$$

volgt dat g surjectief is. Dus is g een isomorfisme, en

$$\mathrm{Ker}\,(f) \cong \mathrm{Ker}\,(m_A)$$

Tenslotte is

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}\,(A) &= \dim\,(\mathrm{Im}\,(m_A)) = n - \dim\,(\mathrm{Ker}\,(m_A)) \\ &= n - \dim\,(\mathrm{Ker}\,(f)) = \dim\,(\mathrm{Im}\,(f)) = \mathrm{rg}\,(f) \end{aligned}$$

□

Gevolg 2.7.4. *Beschouw een $m \times n$-matrix A, een reguliere $n \times n$-matrix M, en een reguliere $m \times m$-matrix N. Dan geldt*

$$\mathrm{rg}\,(N^{-1}AM) = \mathrm{rg}\,(A)$$

Bewijs. Bekijk de lineaire afbeelding

$$m_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

gegeven door $m_A(X) = AX$. Per definitie is $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(m_A)$. Maar om $\mathrm{rg}\,(m_A)$ te berekenen mogen we met gelijk welke basissen van $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^m$ werken (door stelling 2.7.3). We nemen de volgende basissen:
de basis F' van $\mathbb{K}^m$ die bestaat uit de kolommen van N;
de basis E' van $\mathbb{K}^n$ die bestaat uit de kolommen van M.
Vanwege stelling 2.6.3 is de matrix van m_A tenopzichte van E' en F':

$$[m_A]_{F',E'} = N^{-1}AM$$

en dus is $\mathrm{rg}\,(m_A) = \mathrm{rg}\,(N^{-1}AM)$, en de gewenste eigenschap volgt. □

We willen nu aantonen dat de rang van een matrix A ook het maximaal aantal lineair onafhankelijke rijen is. Daartoe voeren we eerst de *getransponeerde* van een matrix A in: dit is de matrix met dezelfde elementen als A, maar met rijen en kolommen omgewisseld.

Definitie 2.7.5. *De* ***getransponeerde*** *van de matrix*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m,n}$$

is de matrix

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,m}$$

De volgende eigenschap zegt dat de getransponeerde van het product van twee matrices gelijk is aan het product van de getransponeerden, in omgekeerde volgorde.

Stelling 2.7.6. *Voor elke $m \times n$-matrix A, en $n \times p$-matrix B geldt:*

$$(AB)^t = B^t A^t$$

Bewijs. Het element op plaats (i,k) in de matrix AB is

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

en dit is tevens het element op plaats (k,i) in de matrix $(AB)^t$. In de matrix B^tA^t vinden we op plaats (k,i):

$$\sum_{j=1}^{n} b_{jk}a_{ij}$$

en de gewenste formule volgt. $\square$

Stelling 2.7.7. *De getransponeerde van een reguliere matrix is ook regulier.*

Bewijs. Zij $M \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ een reguliere matrix. We moeten tonen dat M^t een invers heeft. Een toepassing van voorgaande stelling toont dat $(M^{-1})^t M^t = (MM^{-1})^t = I_n^t = I_n$, alsook $M^t(M^{-1})^t = I_n$. De getransponeerde van de inverse van M is dus wel degelijk de inverse van M^t. $\square$

Stelling 2.7.8. *De rang van elke matrix A is gelijk aan die van zijn getransponeerde*

$$\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(A^t)$$

Bijgevolg is de rang van A gelijk aan het maximaal aantal lineair onafhankelijke rijen van A.

Bewijs. We bekijken weer de lineaire afbeelding

$$m_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

gegeven door linksvermenigvuldiging met A: $m_A(X) = AX$. Onderstel dat $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(m_A) = k$. Dan is $\dim(\mathrm{Ker}\,(m_A)) = n-k$. Neem een basis $\{E'_{k+1},\ldots,E'_n\}$ van $\mathrm{Ker}\,(m_A)$, en vul deze aan tot een basis $E' = \{E'_1,\ldots,E'_n\}$ van $\mathbb{K}^n$. Stel $X = \mathrm{vect}\{E'_1,\ldots,E'_k\}$. In het bewijs van stelling 2.2.12 hebben we gezien dat

$$g = (m_A)_{|X} : X \longrightarrow \mathrm{Im}\,(m_A)$$

een isomorfisme is. Stel nu $F'_i = AE'_i$, voor $i = 1,\ldots,k$. Dan is $\{F'_1,\ldots,F'_k\}$ een basis voor $\mathrm{Im}\,(m_A)$, en we kunnen deze aanvullen tot een basis $\{F'_1,\ldots,F'_m\}$ van $\mathbb{K}^m$.
De matrix van m_A tenopzichte van de standaardbasissen van $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^m$ is A; de matrix van m_A tenopzichte van de basissen E' en F' is

$$B = \begin{pmatrix} I_k & 0_{k(n-k)} \\ 0_{(m-k)k} & 0_{(m-k)(n-k)} \end{pmatrix}$$

waarbij we 0_{mn} noteerden voor de $m \times n$-matrix met enkel nul erin.
Door stelling 2.6.3 bestaan er reguliere matrices N en M zodat

$$B = N^{-1}AM$$

Aangezien

$$B^t = M^tA^t(N^{-1})^t$$

en

$$B^t = \begin{pmatrix} I_k & 0_{k(m-k)} \\ 0_{(n-k)k} & 0_{(n-k)(m-k)} \end{pmatrix}$$

vinden we, met behulp van de voorgaande stellingen, dat

$$\mathrm{rg}\,(A^t) = \mathrm{rg}\,(B^t) = k = \mathrm{rg}\,(A)$$

$\square$

Stelling 2.7.9. *Onderstel dat $A \in \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Dan is A regulier als en slechts als $\mathrm{rg}\,(A) = n$.*

Bewijs. Beschouw de lineaire afbeelding $m_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : X \mapsto AX$. Als A regulier is, dan is m_A een isomorfisme, zodat $\mathrm{Im}\,(m_A) = \mathbb{K}^n$ en $\mathrm{rg}\,(A) = n$.
Omgekeerd, als $\mathrm{rg}\,(A) = n$, dan is m_A surjectief. Maar dan is m_A een isomorfisme, door gevolg 2.2.13, en dan is A regulier. $\square$

Matrices in echelonvorm

In deze paragraaf zullen we zien hoe men in de praktijk de rang van een matrix (en dus van een lineaire afbeelding) kan bepalen.

Definitie 2.7.10. *We zeggen dat een $m \times n$-matrix A in **gereduceerde rij echelon vorm** staat als voldaan is aan de volgende eigenschappen:*

1. *alle rijen van de matrix die volledig uit nullen bestaan staan onderaan in de matrix;*
2. *in elke andere rij is het eerste van nul verschillende element gelijk aan 1; we noemen dit element het **hoofdelement** van de rij;*
3. *het hoofdelement op rij $i+1$ staat rechts van het hoofdelement op rij i, voor elke i;*
4. *als een kolom het hoofdelement van een bepaalde rij bevat, dan bevat die kolom voor de rest enkel nullen.*

*Een matrix die voldoet aan de voorwaarden 1, 2 en 3 (maar niet noodzakelijk 4) staat in **rij echelon vorm**. Een matrix A staat in **(gereduceerde) kolom echelon vorm** als zijn getransponeerde A^t in (gereduceerde) rij echelon vorm staat.*

Voorbeelden 2.7.11. Volgende matrices staan in rij echelon vorm:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en de volgende matrices staan in gereduceerde rij echelon vorm:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Het grote voordeel van een matrix in echelon vorm is dat de rang ervan onmiddellijk kan bepaald worden:

Stelling 2.7.12. *De rang van een matrix in rij (kolom) echelon vorm is gelijk aan het aantal van nul verschillende rijen (kolommen).*

Bewijs. Noteer $R_1, R_2, \ldots, R_k$ voor de van nul verschillende rijen van een matrix A. Dan is $\mathrm{rg}\,(A) = \dim\big(\mathrm{vect}\,\{R_1, R_2, \ldots, R_k\}\big) \leq k$. Het volstaat dus om aan te tonen dat de k rijen lineair onafhankelijk zijn. Onderstel dat $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i R_i = 0$. Schrijf

$$R_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

dan hebben we dus dat, voor elke kolom j:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_{ij} = 0 \tag{2.11}$$

Neem in (2.11) voor j de kolomindex van het hoofdelement van de eerste rij. Dan zijn alle andere a_{ij} in die kolom 0, zodat noodzakelijkerwijze $\alpha_1 = 0$.
We gaan verder per inductie: onderstel dat bewezen is dat $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{\ell-1} = 0$. Neem nu in (2.11) voor j de kolomindex van het hoofdelement van de rij R_ℓ. Dan volgt dat $\alpha_\ell = 0$.
Per inductie volgt dat alle $\alpha_\ell = 0$, en bijgevolg zijn de k rijen $R_1, R_2, \ldots, R_k$ lineair onafhankelijk. $\square$

Definitie 2.7.13. *Beschouw een matrix A. Een* ***elementaire rij (kolom) operatie*** *op A is een operatie van een van de volgende types:*

- *type I: verwisseling van twee rijen (kolommen);*
- *type II: vermenigvuldiging van een rij (kolom) met $c \neq 0$;*
- *type III: optelling van c maal i-de rij (kolom) bij de j-de rij (kolom), waarbij $i \neq j$.*

Twee matrices A en B heten ***rijequivalent (kolomequivalent)*** *als B uit A kan verkregen worden door het toepassen van elementaire rij (kolom) operaties.*

Stelling 2.7.14. *Onderstel dat de matrix B met rijen $S_1,\dots,S_n$ rijequivalent is met de matrix A met rijen $R_1,\dots,R_n$. Dan is*

$$\mathrm{vect}\{S_1,\dots,S_n\} = \mathrm{vect}\{R_1,\dots,R_n\}$$

en bijgevolg is

$$\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(B)$$

Een analoge eigenschap geldt voor kolomequivalente matrices.

Bewijs. We zien onmiddellijk dat de vectorruimte voortgebracht door de rijen van een matrix niet verandert als we een elementaire rijoperatie toepassen. □

Stelling 2.7.15. *Elke matrix A is rijequivalent (kolomequivalent) met een matrix in rij (kolom) echelon vorm.*

Bewijs. Kijk naar de eerste kolom j in A met een van nul verschillend element erin. Verwissel de rij waar dit element in voorkomt met de eerste rij, en deel de nieuwe eerste rij door dit element. We krijgen dus een nieuwe matrix B met de eerste $j-1$ kolommen nul, en $b_{1j}=1$. Trek van alle andere rijen b_{ij} maal de eerste rij af. We krijgen dan een nieuwe matrix C met de eerste $j-1$ kolommen nul, $c_{1j}=1$ en $c_{ij}=0$ voor $i>1$.
Herhaal nu de bovenstaande procedure voor de matrix

$$\begin{pmatrix} c_{2,j+1} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m,j+1} & \cdots & c_{m,n} \end{pmatrix}$$

We krijgen dan een nieuwe matrix D, rijequivalent met A, waarvoor de eerste $j-1$ kolommen nul, $d_{1j}=d_{2k}=1$, $k>j$, $d_{pq}=0$ voor $p>1$ en $j<q<k$, $d_{ij}=0$ voor $i>1$ en $d_{ik}=0$ voor $i>2$.
Herhaal deze procedure tot er onderaan in de matrix enkel nog rijen met enkel 0 erin voorkomen. De matrix staat dan in echelonvorm. □

Met behulp van stelling 2.7.15 kunnen we dus de rang van een matrix bepalen, en ook de vectorruimte voortgebracht door een stel vectoren in een eindigdimensionale ruimte. We kunnen ons resultaat nog een beetje verscherpen:

Stelling 2.7.16. *Elke matrix A is rijequivalent (kolomequivalent) met een matrix in gereduceerde rij (kolom) echelon vorm.*

Bewijs. Pas zelf het algoritme uit het bewijs van stelling 2.7.15 aan zodat we een matrix in gereduceerde rij (kolom) echelon vorm krijgen. □

Voorbeeld 2.7.17. We beschouwen de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

We zullen de matrix A in rijechelonvorm brengen, en hiervoor het algoritme uit het bewijs van stelling 2.7.15 gebruiken. De eerste kolom is de eerste met een van nul verschillend element erin, en dit staat op de derde rij. We verwisselen de eerste en de derde rij, en we krijgen de matrix

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Deel nu de eerste rij van B_1 door $b_{11} = 2$:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Tel nu -2 maal de eerste rij op bij de vierde rij:

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Vervolgens verwisselen we de tweede en derde rij van B_3 om een van nul verschillend element in de positie $(2,2)$ te krijgen:

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Deel de tweede rij van B_4 door 2:

$$B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Tel 2 maal de tweede rij op bij de vierde rij:

$$B_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Deel nu de derde rij door 2:

$$B_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Trek 2 maal de derde rij af van de vierde rij:

$$B_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De matrix B_8 staat in rij echelon vorm, en is rijequivalent met A. We kunnen besluiten dat $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B_8) = 3$, en dat

$$\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}\}$$

een basis is voor de vectorruimte voortgebracht door de rijen van de matrix A.

Hoofdstuk 3

Lineaire variëteiten en stelsels lineaire vergelijkingen

3.1 Lineaire variëteiten

Beschouw de vectorruimte $\mathbb{R}^3$, en onderstel dat $W \subset \mathbb{R}^3$ een deelruimte is. Er zijn dan vier mogelijkheden:

- $\dim(W) = 0$. Dan is $W = \{\vec{0}\}$.
- $\dim(W) = 1$. Dan is $W = \mathbb{R}\vec{a}$, voor een van nul verschillende vector $\vec{a}$, en W is dan een rechte door de oorsprong.
- $\dim(W) = 2$. Dan is $W = \mathbb{R}\vec{a} + \mathbb{R}\vec{b}$, voor twee niet evenwijdige vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, en W is een vlak door de oorsprong.
- $\dim(W) = 3$. Dan is $W = \mathbb{R}^3$.

De niet-triviale deelruimten van $\mathbb{R}^3$ zijn dus de rechten en vlakken door de oorsprong. Rechten en vlakken die niet door $\vec{0}$ gaan zijn uiteraard geen vectorruimten, maar we kunnen ze wel gemakkelijk beschrijven: neem een rechte $W = \mathbb{R}\vec{a}$ door de oorsprong. Voor elke vector $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ is de verzameling $L = \vec{b} + \mathbb{R}\vec{a}$ de rechte door $\vec{b}$ en evenwijdig met $\vec{a}$. Inderdaad, L is de verzameling vectoren van de vorm

$$\vec{v} = \vec{b} + \alpha\vec{a},$$

met $\alpha \in \mathbb{R}$. Dit is de vectorvergelijking van de rechte door $\vec{b}$ en evenwijdig met $\vec{a}$.
Op dezelfde manier kunnen we elk vlak in $\mathbb{R}^3$ schrijven als de som $\vec{c} + W$, waarbij W een vlak door de oorsprong is. Vandaar de volgende definitie:

Definitie 3.1.1. *Onderstel dat V een vectorruimte is. Een* ***lineaire variëteit*** *L is een deelverzameling van V van de vorm*

$$L = \vec{a} + W$$

waarbij $\vec{a} \in V$ en W een deelruimte is van V.

Laten we om te beginnen aantonen dat de deelruimte W uniek bepaald is door de lineaire variëteit L.

Stelling 3.1.2. *Neem $\vec{a},\ \vec{a}' \in V$, en $W,\ W'$ deelruimten van V. Dan geldt*

$$\vec{a}+W=\vec{a}'+W' \iff W=W' \text{ en } \vec{a}'-\vec{a}\in W$$

Bewijs. Merk eerst op dat voor elke deelruimte W van V en $\vec{w}\in W$ geldt dat (bewijs dit zelf)

$$\vec{w}+W=W \tag{3.1}$$

Onderstel nu dat $\vec{a}'-\vec{a}\in W$, en $W=W'$. Dan geldt dat

$$\vec{a}'+W'=\vec{a}+(\vec{a}'-\vec{a})+W=\vec{a}+W$$

Onderstel omgekeerd dat $\vec{a}+W=\vec{a}'+W'$. Dan is $\vec{a}=\vec{a}+\vec{0}\in\vec{a}+W=\vec{a}'+W'$, zodat $\vec{a}=\vec{a}'+\vec{w}'$, met $\vec{w}'\in W'$, en dus is $\vec{a}'-\vec{a}\in W'$.
Op dezelfde manier geldt voor elke $\vec{w}\in W$ dat

$$\vec{a}+\vec{w}\in\vec{a}+W=\vec{a}'+W',$$

zodat $\vec{a}+\vec{w}=\vec{a}'+\vec{w}'$, met $\vec{w}'\in W'$, en dus

$$\vec{w}=(\vec{a}'-\vec{a})+\vec{w}'\in W'$$

en dit impliceert dat $W\subset W'$. Op volledig analoge wijze bewijzen we dat $W'\subset W$, en dit bewijst onze stelling. □

Stelling 3.1.2 laat ons toe om de **dimensie** van een lineaire variëteit te definieren: het is de dimensie van de bijhorende deelruimte W:

$$\dim(\vec{a}+W)=\dim(W)$$

Een ééndimensionale variëteit wordt gewoonlijk een **rechte** genoemd. Als $\dim(V)=n$, dan noemen we een $n-1$-dimensionale variëteit een **hypervlak**.

De vectorvergelijking van een lineaire variëteit

Onderstel dat L een lineaire variëteit is, met bijhorende deelruimte W van V. Voor elke $\vec{a}\in L$ geldt dat

$$L=\vec{a}+W$$

(bewijs dit zelf). Neem een basis $\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\ldots,\vec{b}_k\}$ van W. Dan wordt L beschreven door de vectoren

$$\vec{v}=\vec{a}+\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\vec{b}_i \tag{3.2}$$

waarbij $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$. We noemen (3.2) de **vectorvergelijking** van de lineaire variëteit L. Als bijzonder geval kunnen we de vectorvergelijking van de rechte L door het punt $\vec{a}$ en met bijhorende vectorruimte $W = \mathbb{K}\vec{b}$ opschrijven:

$$\vec{v} = \vec{a} + \alpha\vec{b} \tag{3.3}$$

Indien $\dim(V) = n$, en $E = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ een basis is van V, dan kunnen we (3.3) herschrijven. Als $[\vec{a}]_E = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $[\vec{b}]_E = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ en $[\vec{v}]_E = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dan wordt (3.3)

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + \alpha b_1 \\ x_2 = a_2 + \alpha b_2 \\ \vdots \\ x_n = a_n + \alpha b_n \end{cases} \tag{3.4}$$

Men noemt deze vergelijking de **parametervergelijking** van de rechte L. Stel zelf de parametervergelijking op van de rechte L die door twee gegeven punten $\vec{a}$ en $\vec{b}$ gaat.
Als we uit (3.4) de parameter α elimineren, dan krijgen we de **Cartesische vergelijkingen** van de rechte L. Indien alle $b_i \neq 0$, dan wordt deze

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2} = \cdots = \frac{x_n - a_n}{b_n} \tag{3.5}$$

Schrijf zelf de vergelijking op van L in het geval dat één of meer van de b_i nul zijn.

De vergelijking van een hypervlak

Herinner dat de vergelijking van een vlak in de driedimensionale ruimte van de volgende vorm is:

$$ax + by + cz = d$$

We gaan dit nu veralgemenen voor hypervlakken in een n-dimensionale vectorruimte V.

Stelling 3.1.3. *Onderstel dat $f : V \to W$ een lineaire afbeelding is, en dat $\vec{b} \in \mathrm{Im}(f)$. Dan is $f^{-1}\{\vec{b}\}$ een lineaire variëteit in V.*

Bewijs. Aangezien $\vec{b}$ in het beeld van f ligt, weten we dat er een $\vec{a} \in V$ is zodat $f(\vec{a}) = \vec{b}$. We weten ook (cf. stelling 2.2.2) dat $\ker(f) = f^{-1}\{\vec{0}\}$ een deelruimte van V is. We beweren nu dat

$$f^{-1}\{\vec{b}\} = \vec{a} + \mathrm{Ker}(f) \tag{3.6}$$

Onderstel $\vec{x} \in f^{-1}\{\vec{b}\}$. Dan is $f(\vec{x}) = \vec{b}$, en dus is $f(\vec{x} - \vec{a}) = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$, zodat $\vec{x} - \vec{a} \in \mathrm{Ker}(f)$, en $\vec{x} \in \vec{a} + \mathrm{Ker}(f)$.
Omgekeerd, indien $\vec{x} \in \vec{a} + \mathrm{Ker}(f)$, dan is $\vec{x} = \vec{a} + \vec{y}$, met $f(\vec{y}) = \vec{0}$, zodat $f(\vec{x}) = f(\vec{a}) = \vec{b}$ en $\vec{x} \in f^{-1}\{\vec{b}\}$.
Dit bewijst (3.6), en de stelling volgt. □

We gaan nu het omgekeerde van stelling 3.1.3 bewijzen: elke lineaire variëteit kan geschreven worden als het inverse beeld van een vector $\vec{b}$ onder een lineaire afbeelding f:

Stelling 3.1.4. *Onderstel dat* $\dim(V) = n$*, en* $L \subset V$ *een lineaire variëteit van dimensie* $n-k$*. Als* W *een vectorruimte is van dimensie ten minste* k*, dan bestaat er een lineaire afbeelding* $f: V \to W$*, en* $\vec{b} \in W$ *zodat* $L = f^{-1}(\vec{b})$*.*

Bewijs. Stel dat $L = \vec{a} + X$, waarbij X een $(n-k)$-dimensionale deelruimte van V is met basis $\{\vec{e}_{k+1}, \ldots, \vec{e}_n\}$. Vul deze basis aan tot een basis $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \ldots, \vec{e}_n\}$ van V (cf. stelling 1.4.13). De dimensie van W is tenminste k, en W bevat een stel van k lineair onafhankelijke vectoren, noem deze $\{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_k\}$.
We definiëren nu $f: V \to W$ door

$$f(\vec{e}_i) = \begin{cases} \vec{f}_i & \text{als } i \leq k; \\ \vec{0} & \text{als } i > k. \end{cases}$$

Merk op dat $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{vect}\{\vec{e}_{k+1}, \ldots, \vec{e}_n\} = X$. Stel $f(\vec{a}) = \vec{b}$. Dan geldt

$$\begin{aligned} f(\vec{v}) = \vec{b} &\iff \vec{0} = f(\vec{v}) - \vec{b} = f(\vec{v} - \vec{a}) \\ &\iff \vec{v} - \vec{a} \in \operatorname{Ker}(f) = X \\ &\iff \vec{v} \in \vec{a} + X = L \end{aligned}$$

Hiermee hebben we aangetoond dat $L = f^{-1}(\vec{b})$. □

Laten we dit toepassen om de vergelijking van een hypervlak op te stellen. Indien $k = 1$ in de voorgaande stelling, dan kunnen we $W = \mathbb{K}$ nemen (W moet dimensie tenminste 1 hebben). Er bestaat dus een $f: V \to \mathbb{K}$ en $b \in \mathbb{K}$ zodat

$$f^{-1}(b) = L$$

of

$$L = \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = b\}$$

met andere woorden, het hypervlak L bestaat uit de oplossingen van de vergelijking

$$f(\vec{v}) = b \tag{3.7}$$

Kies een basis $E = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$. Onderstel dat de matrix van f ten opzichte van de basissen E en $\{1\}$ gegeven wordt door de rijvector

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Dan bestaat het hypervlak L uit de vectoren met coördinaten $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ die voldoen aan

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{3.8}$$

We noemen (3.8) de **vergelijking** van het hypervlak $L = f^{-1}(b)$.

Evenwijdige variëteiten

Definitie 3.1.5. *Twee lineaire variëteiten $L = \vec{a} + W$ en $L' = \vec{a}' + W'$ in een vectorruimte V worden **evenwijdig** genoemd als $W \subset W'$ of $W' \subset W$.*

Affiene afbeeldingen

Een afbeelding $g: V \to V$ wordt een **affiene afbeelding** genoemd als er een $\vec{a} \in V$ en een lineaire afbeelding $f: V \to V$ bestaan zodat voor elke $\vec{x} \in V$ geldt

$$g(\vec{x}) = \vec{a} + f(\vec{x}).$$

Stelling 3.1.6. *De samenstelling van twee affiene afbeeldingen is affien.*

Bewijs. Oefening. □

3.2 Stelsels lineaire vergelijkingen

Het stelsel vergelijkingen

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{3.9}$$

noemen we een **stelsel** van m lineaire vergelijkingen in n onbekenden $x_1, x_2, \ldots, x_n$. We kunnen dit als volgt herschrijven:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

voor $i = 1, \ldots, m$. We voeren nu de volgende notaties in:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Het stelsel (3.9) kan dus als volgt herschreven worden:

$$AX = B \tag{3.10}$$

De afbeelding $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(X) = AX$ is lineair, en de verzameling oplossingen van (3.10) is het invers beeld van B onder de afbeelding f:

$$\mathrm{Opl}(AX = B) = f^{-1}(B)$$

Er zijn nu twee mogelijkheden. Ofwel is $B \in \mathrm{Im}\,(f)$, en dan heeft $AX = B$ oplossingen, ofwel is $B \notin \mathrm{Im}\,(f)$, en dan is $\mathrm{Opl}(AX = B) = \emptyset$.
Noteer $A_1, A_2, \ldots, A_n$ voor de kolommen van de matrix A. Het stelsel (3.10) kan dan herschreven worden onder de volgende vorm:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n = B \tag{3.11}$$

We zien nu dat

$$\begin{aligned}
& B \in \mathrm{Im}\,(f) \\
\Longleftrightarrow\quad & \text{(3.11) heeft tenminste 1 oplossing} \\
\Longleftrightarrow\quad & B \in \mathrm{vect}\,\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \mathbb{K}^m \\
\Longleftrightarrow\quad & \mathrm{vect}\,\{A_1, A_2, \ldots, A_n, B\} = \mathrm{vect}\,\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \\
\Longleftrightarrow\quad & \dim(\mathrm{vect}\,\{A_1, A_2, \ldots, A_n, B\}) = \dim(\mathrm{vect}\,\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}) \\
\Longleftrightarrow\quad & \mathrm{rg}\,\big(A_1, A_2, \ldots, A_n, B\big) = \mathrm{rg}\,\big(A_1, A_2, \ldots, A_n\big) \\
\Longleftrightarrow\quad & \mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(A \mid B)
\end{aligned}$$

waarbij we $(A \mid B)$ noteren voor de $m \times (n+1)$-matrix met kolommen $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$.
Door contrapositie vinden we dat

$$B \notin \mathrm{Im}\,(f) \iff \mathrm{rg}\,(A) \neq \mathrm{rg}\,(A \mid B)$$

en in dit geval is noodzakelijkerwijze $\mathrm{rg}\,(A \mid B) = \mathrm{rg}\,(A) + 1$. Immers, als we aan de matrix A een kolom toevoegen, dan kan het aantal lineair onafhankelijke kolommen van A met ten hoogste 1 verhogen.
Onderstel dat $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(A \mid B)$, en dat X_0 een particuliere oplossing van het stelsel (3.10) is. Gebruik makende van stelling 3.1.3 vinden we dat $\mathrm{Opl}(AX = B)$ een lineaire variëteit is in $\mathbb{K}^n$, en dat (cf. (3.6))

$$\mathrm{Opl}(AX = B) = X_0 + \mathrm{Ker}\,(m_A) = X_0 + \mathrm{Opl}(AX = 0)$$

Het stelsel $AX = 0$ noemen we het **homogeen stelsel** geassocieerd aan het stelsel $AX = B$. De oplossing van het oorspronkelijk stelsel is dus de som van een **particuliere** oplossing en de algemene oplossing van het geassocieerd homogeen stelsel. Gebruik makend van de tweede dimensiestelling vinden we bovendien dat

$$\dim(\mathrm{Opl}(AX = B)) = \dim(\mathrm{Ker}\,(m_A)) = n - \dim(\mathrm{Im}\,(m_A)) = n - \mathrm{rg}\,(A)$$

We vatten onze resultaten samen als volgt:

Stelling 3.2.1. *Beschouw $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^m$, en het lineair stelsel $AX = B$. Dan geldt*

$$\begin{aligned}
AX = B \text{ heeft oplossingen} \quad &\iff \quad \mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(A \mid B) \\
AX = B \text{ heeft geen oplossingen} \quad &\iff \quad \mathrm{rg}\,(A) + 1 = \mathrm{rg}\,(A \mid B)
\end{aligned}$$

Als $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(A \mid B)$ dan is $\mathrm{Opl}(AX = B)$ een lineaire variëteit in $\mathbb{K}^n$, met dimensie $n - \mathrm{rg}\,(A)$. Als X_0 een particuliere oplossing is, dan geldt bovendien

$$\mathrm{Opl}(AX = B) = X_0 + \mathrm{Opl}(AX = 0)$$

Oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen

Stelling 3.2.2. *Beschouw twee lineaire stelsels $AX = B$ en $CX = D$ van m vergelijkingen in n onbekenden. Indien de matrices $(A \mid B)$ en $(C \mid D)$ rijequivalent zijn (cf. definitie 2.7.13). Dan is*

$$\mathrm{Opl}(AX = B) = \mathrm{Opl}(CX = D)$$

Bewijs. Het volstaat om na te gaan dat het uitvoeren van elementaire rijoperaties op de matrix $(A \mid B)$ de oplossingsverzameling ongemoeid laten. Dit is duidelijk: een operatie van type I komt er op neer twee vergelijkingen met elkaar te verwisselen; type II komt er op neer een van de vergelijkingen met $c \neq 0$ te vermenigvuldigen; type III komt er op neer om bij een van de vergelijkingen c maal een van de andere op te tellen. Als we één van deze drie operaties uitvoeren, krijgen we telkens een equivalent stelsel. □

Uit stellingen 2.7.15, 3.2.1 en 3.2.2 volgt nu dat we een stelsel lineaire vergelijkingen als volgt kunnen oplossen:

Algoritme 3.2.3. (Gauss eliminatie) *Neem een lineair stelsel $AX = B$. Dit kunnen we als volgt oplossen.*

1. *Gebruik het algoritme uit het bewijs van stelling 2.7.15 om de matrix $(A \mid B)$ in rij echelonvorm te brengen. Noem de nieuwe matrix $(C \mid D)$.*
2. *Men vergelijkt de rangen van de matrices C en $(C \mid D)$. Hiervoor volstaat het het aantal van nul verschillende rijen te vergelijken. Er zijn twee mogelijkheden:*
   - $\mathrm{rg}\,(C) = \mathrm{rg}\,(C \mid D) - 1$. *Dan heeft het stelsel geen oplossingen.*
   - $\mathrm{rg}\,(C) = \mathrm{rg}\,(C \mid D)$. *Men lost het stelsel $CX = D$ op door te vertrekken vanaf de onderste vergelijking.*

Voorbeeld 3.2.4. We lossen het stelsel

$$\begin{cases} x + 2y + 2z + 3t &= 13 \\ x - 2y + z + t &= 8 \\ 3x + y + z - t &= -1 \end{cases}$$

op met behulp van Gauss eliminatie. Eerst brengen we de matrix

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 2 & 3 & 13 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

in rij echelon vorm. We krijgen achtereenvolgens de volgende matrices:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & -4 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & -5 & -5 & -10 & -40 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 5/4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 5/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 3/2 & 27/4 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 5/4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 9 \end{array}\right)$$

Ons stelsel is dus equivalent met het stelsel

$$\begin{cases} x+2y+2z+3t &= 13 \\ y+z/4+t/2 &= 5/4 \\ z+2t &= 9 \end{cases}$$

We lossen dit stelsel op van onder naar boven:

$$\begin{aligned} z &= 9-2t \\ y &= 5/4-z/4-t/2 \\ &= \frac{1}{4}(5-9+2t-2t)=-1 \\ x &= 13-2y-2z-3t \\ &= 13+2-18+4t-3t \\ &= -3+t \end{aligned}$$

We kunnen dus besluiten dat

$$\mathrm{Opl}(AX=B)=\{(-3+t,-1,9-2t,t)\mid t\in\mathbb{K}\}=(-3,-1,9,0)+\mathrm{vect}\{(1,0,-2,1)\}$$

Dit is een lineaire variëteit van dimensie 1. De rang van de matrix A is drie.

Een variante van algorimte 3.2.3 bestaat erin om de matrix $(A\mid B)$ in gereduceerde rij echelon vorm te brengen. Dit heeft het voordeel dat de oplossingen onmiddellijk af te lezen zijn uit het nieuwe stelsel $CX=D$. Een nadeel is echter dat het meer berekeningen vergt om tot de gereduceerde rij echelon matrix $(C\mid D)$ te komen. Men noemt deze methode de **Gauss-Jordan eliminatie** methode.

Voorbeeld 3.2.5. We hernemen het bovenstaande voorbeeld, en passen de Gauss-Jordan eliminatie methode toe. We krijgen nu achtereenvolgens de volgende matrices:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 13 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & -4 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & -5 & -5 & -10 & -40 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 5/4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3/2 & 2 & 21/2 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 5/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 3/2 & 27/4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3/2 & 2 & 21/2 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 5/4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 9 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 9 \end{array}\right)$$

Ons stelsel is dus equivalent met het stelsel

$$\begin{cases} x-t &= -3 \\ y &= -1 \\ z+2t &= 9 \end{cases}$$

waaruit de oplossing volgt.

Beide methoden werken perfect indien het aantal vergelijkingen en onbekenden niet te groot is. Ze kunnen ook gemakkelijk in een computerprogramma geïmplementeerd worden. Indien we een stelsel met een groot aantal vergelijkingen en onbekenden hebben (bijvoorbeeld een 1000 bij 1000 stelsel, dit komt in de praktijk voor), dan kunnen allerlei numerieke moeilijkheden optreden. Er bestaan dan allerlei varianten op de Gauss eliminatie methode die deze moeilijkheden trachten te omzeilen. Jullie zullen enkele hiervan bespreken in de cursus *numerieke algoritmen*.
In vele gevallen kan men iteratieve methoden gebruiken om de oplossing van een lineair stelsel te bepalen: men construeert een rij vectoren die naar de oplossing convergeert. We verwijzen hier eveneens naar de cursus *numerieke algoritmen*.

Bepalen van de inverse van een matrix

Neem een vierkante matrix $A \in \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, en onderstel dat $\mathrm{rg}\,(A) = n$. Dan is m_A een isomorfisme en A een reguliere matrix. Als we de Gauss-Jordan eliminatie methode toepassen op het stelsel $AX = B$, dan krijgen we dat de matrix $(A \mid B)$ rijequivalent is met de matrix $(I_n \mid X_0)$, waarbij I_n de eenheidsmatrix is, en X_0 de (unieke) oplossing van het stelsel. Dit is natuurlijk een interessante opmerking op zichzelf, maar ze kan ook gebruikt worden om de inverse van de matrix A te bepalen. Hiervoor maken we eerst volgende opmerkingen: om de inverse van de matrix A te bepalen volstaat het om het stelsel

$$AX = E_i$$

met $E_i = (0,\dots,1,\dots,0)$ op te lossen voor $i = 1,\dots,n$. Als X_i de oplossing is van dit stelsel, dan is

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{pmatrix}$$

Twee stelsels $AX = B$ en $AX = C$ kunnen we gelijktijdig oplossen door de matrix $(A \mid B \mid C)$ in gereduceerde rij echelon vorm te brengen.
Indien we de matrix $(A \mid I_n)$ in gereduceerde rij echelon vorm brengen, dan krijgen we dus noodzakelijkerwijs de matrix $(I_n \mid A^{-1})$. We vatten dit samen als volgt:

Algoritme 3.2.6. *Onderstel dat $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ een reguliere matrix is. Dan is de gereduceerde rij echelon vorm van de matrix $(A \mid I_n)$ de matrix $(I_n \mid A^{-1})$.*

Voorbeeld 3.2.7. Neem de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

We brengen de matrix

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

in gereduceerde rij echelon vorm. We krijgen achtereenvolgens de volgende matrices:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Trek van de derde rij 5 maal de eerste rij af:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Deel de tweede rij door 2, en de derde door -4:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & 0 & -1/4 \end{array}\right)$$

Trek de tweede rij af van de eerste rij:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & 0 & -1/4 \end{array}\right)$$

Tel bij de tweede rij $-3/2$ maal de derde rij op:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -15/8 & 1/2 & 3/8 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & 0 & -1/4 \end{array}\right)$$

Tel de helft van de derde rij op bij de eerste rij:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 13/8 & -1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 & -15/8 & 1/2 & 3/8 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & 0 & -1/4 \end{array}\right)$$

We kunnen besluiten dat

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 13/8 & -1/2 & -1/8 \\ -15/8 & 1/2 & 3/8 \\ 5/4 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Verifieer zelf dat $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$.

Hoofdstuk 4

Determinanten

4.1 Permutaties

Neem een verzameling A. Een **permutatie** van A is een bijectie van A naar zichzelf. We noteren $S(A)$ voor de verzameling van alle permutaties van A.

Stelling 4.1.1. *Voor elke verzameling A is $(S(A), \circ)$ een groep. Deze groep wordt de **symmetrische groep** van de verzameling A genoemd.*

In het vervolg zijn we vooral geïnteresseerd in het geval waarin we voor A een eindige verzameling nemen. We kunnen dan voor A even goed de verzameling $\{1,2,\ldots,n\}$ nemen, en daarom noteren we $S_n = S(\{1,2,\ldots,n\})$.

Stelling 4.1.2. *Onderstel dat A een eindige verzameling is, en dat $\#(A) = n$. Dan is $\#(S(A)) = n!$.*

Bewijs. Oefening. $\square$

We kunnen een permutatie σ van $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ opschrijven als volgt:

$$\sigma = \{(a_1, \sigma(a_1)), (a_2, \sigma(a_2)), \ldots, (a_n, \sigma(a_n))\}$$

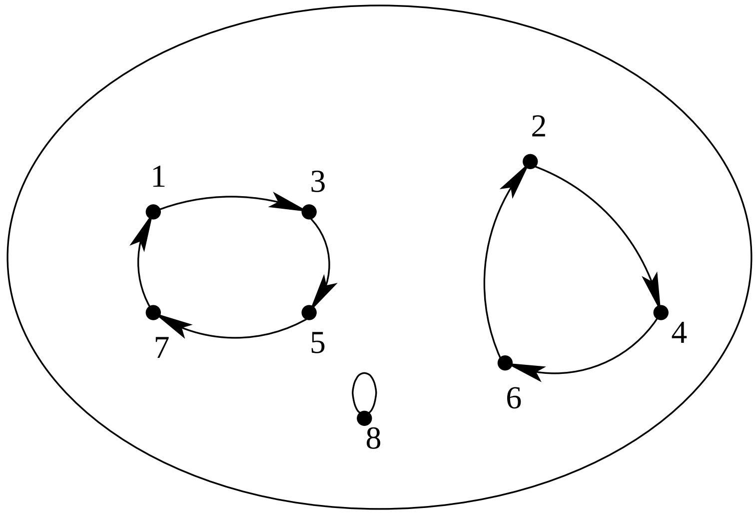
Een iets meer overzichtelijke notatie is de volgende:

$$\sigma = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \sigma(a_1) & \sigma(a_2) & \cdots & \sigma(a_n) \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 4.1.3. Neem $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ en bekijk volgende permutatie:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

σ kan voorgesteld worden met behulp van een Venn-diagram (zie Figuur 4.1). We noemen $[1,3,5,7]$,



Figuur 4.1: Een permutatie van $\{1,2,\ldots,8\}$

$[2,4,6]$ en $[8]$ de *banen* van σ. We zullen daarom ook schrijven:

$$\sigma = [1,3,5,7][2,4,6][8] \tag{4.1}$$

Merk op dat het niet belangrijk is in welke volgorde we de banen opschrijven. Het heeft ook geen belang met welk element van een baan we beginnen: de baan $[1,3,5,7]$ kunnen we ook opschrijven als $[3,5,7,1]$ of $[5,7,1,3]$ of $[7,1,3,5]$ De banen van lengte 1 (deze corresponderen met de lussen in de permutatie) laten we soms weg:

$$\sigma = [1,3,5,7][2,4,6]$$

Zo stelt bijvoorbeeld $[2,4,6]$ de volgende permutatie voor:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 2 & 7 & 8 \end{bmatrix},$$

of de permutatie $[2,4,6][1][3][5][7][8]$. Er is dus een dubbelzinnigheid in onze notaties: $[2,4,6]$ stelt zowel een baan voor als een volledige permutatie; dit leidt in het algemeen niet tot verwarring. Dit laat ons tevens toe om (4.1) als volgt te herschrijven:

$$\sigma = [1,3,5,7] \circ [2,4,6]$$

Laten we dit voorbeeld veralgemenen. Eerst bewijzen we het volgende lemma:

Lemma 4.1.4. *Onderstel dat A een* eindige *verzameling is. Dan geldt:*

$$\forall \sigma \in S(A),\ \forall a \in A,\ \exists m \geq 1 :\ \sigma^m(a) = a$$

Bewijs. Bekijk de rij $(a, \sigma(a), \sigma^2(a), \sigma^3(a), \ldots)$. Aangezien A eindig is bestaan m en n zodanig dat $\sigma^n(a) = \sigma^m(a)$. Onderstel dat $m > n$, en pas σ^{-1} n maal toe op beide leden. Dan volgt dat $a = \sigma^{m-n}(a)$. □

Neem een permutatie σ van een eindige verzameling A. Neem $a \in A$, en neem $m \geq 1$ minimaal zodat $\sigma^m(a) = a$. Als we de permutatie σ op a laten werken, dan krijgen we achtereenvolgens de waarden $a,\ \sigma(a),\ \sigma^2(a), \ldots, \sigma^{m-1}(a)$. We noemen

$$[a,\ \sigma(a), \sigma^2(a), \ldots, \sigma^{m-1}(a)]$$

de **baan** van a onder de permutatie σ en noemen m de **lengte** van de baan.
Neem nu een ander element $b \in A$. Er zijn dan twee mogelijkheden: 1) $b = \sigma^i(a)$, voor een zekere $i \in \mathbb{N}$. b ligt dan in de baan van a, en de banen van a en b zijn dan dezelfde. We zeggen dat a en b op dezelfde baan liggen, en noteren dit door

$$[a,\ \sigma(a), \sigma^2(a), \ldots, \sigma^{m-1}(a)] = [b,\ \sigma(b), \sigma^2(b), \ldots, \sigma^{m-1}(b)]$$

Zo zijn bijvoorbeeld de banen $[a,b,c,d]$ en $[c,d,a,b]$ dezelfde.
2) Voor elke i is $b \neq \sigma^i(a)$. We zeggen dan dat a en b op verschillende banen liggen.
De relatie "… ligt op dezelfde baan als …" is een equivalentierelatie. De equivalentieklassen van deze relatie zijn de verzamelingen bepaald door de banen van σ en deze vormen een partitie van A. Als we de banen van een permutatie σ kennen, dan kennen we de permutatie σ volledig; van elk element van A kennen we dan immers het beeld.

Een permutatie van A met slechts één baan wordt ook wel een **cyclische permutatie** van A genoemd.

Verwisselingen

Een **verwisseling** van A is een permutatie van A waarbij twee elementen met elkaar verwisseld worden, en alle andere op zichzelf afgebeeld. Een verwisseling is dus een permutatie van het type

$$\tau = [a,b]$$

met $a \neq b \in A$. In Figuur 4.2 zien we een verwisseling voorgesteld op een Venn-diagram.

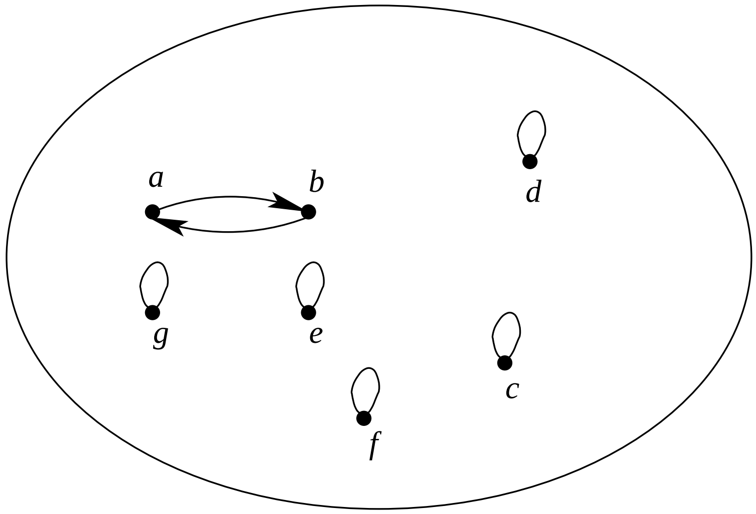
Stelling 4.1.5. *Elke permutatie van een eindige verzameling A kan geschreven worden als een samenstelling van verwisselingen.*

Bewijs. Het volstaat om aan te tonen dat elke baan van de permutatie, dit is een cyclische permutatie van een deel van A, te schrijven is als een samenstelling van verwisselingen. We beweren dat

$$[a_1, a_2, \ldots, a_r] = [a_1, a_r] \circ [a_1, a_{r-1}] \circ \cdots \circ [a_1, a_2]$$

Dit kan bewezen worden per inductie op r. Voor $r = 2$ is de formule triviaal.
Onderstel dat de formule waar is voor $r-1$. Het volstaat om dan te bewijzen dat

$$[a_1, a_2, \ldots, a_r] = [a_1, a_r] \circ [a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}]$$



Figuur 4.2: Een verwisseling

Noteer

$$\sigma = [a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}] \text{ en } \tau = [a_1, a_r]$$

De samenstelling $\tau \circ \sigma$ bepalen we dan als volgt.

$$\begin{array}{ccccc}
a_1 & \overset{\sigma}{\mapsto} & a_2 & \overset{\tau}{\mapsto} & a_2 \\
a_2 & \overset{\sigma}{\mapsto} & a_3 & \overset{\tau}{\mapsto} & a_3 \\
a_3 & \overset{\sigma}{\mapsto} & a_4 & \overset{\tau}{\mapsto} & a_4 \\
\vdots & & & & \\
a_{r-1} & \overset{\sigma}{\mapsto} & a_1 & \overset{\tau}{\mapsto} & a_r \\
a_r & \overset{\sigma}{\mapsto} & a_r & \overset{\tau}{\mapsto} & a_1
\end{array}$$

en we zien dat $(\tau \circ \sigma)(a_i) = a_{i+1}$ voor $i < r$ en $(\tau \circ \sigma)(a_r) = a_1$, met andere woorden

$$\tau \circ \sigma = [a_1, a_2, \ldots, a_r]$$

□

Als een permutatie σ kan geschreven worden als de samenstelling van een even aantal verwisselingen, dan zeggen we dat de **pariteit** van σ **even** is, en noteren dit door $\varepsilon(\sigma) = 1$. Als σ de samenstelling is van een oneven aantal verwisselingen, dan zeggen we dat de pariteit oneven is, en we noteren $\varepsilon(\sigma) = -1$.
Er is hier een probleem, omdat een permutatie op vele manieren kan geschreven worden als een product van verwisselingen. Zo is bijvoorbeeld

$$[3,2,1] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= [3,1]\circ[3,2]\\
&= [1,2]\circ[2,3]\circ[3,1]\circ[1,2]
\end{aligned}
$$

Om aan te tonen dat de pariteit welgedefinieerd is, moeten we dus bewijzen dat als een permutatie op twee manieren kan geschreven worden als de samenstelling van verwisselingen, dat dan het verschil in aantal verwisselingen even is.
Het bewijs hiervan behoort niet tot de leerstof voor ingenieurstudenten, maar we vermelden het wel, voor de volledigheid. We gaan als volgt te werk: we geven eerst een alternatieve definitie van de pariteit. Het voordeel van de definitie is dat er geen probleem is met de welgedefinieerdheid, maar het nadeel is dat de definitie wat artificiëler lijkt. Daarna zullen we aantonen dat beide definities op hetzelfde neerkomen.

Definitie 4.1.6. *De afbeelding* $\varepsilon:\ S(A)\to\{-1,1\}$ *wordt als volgt gedefinieerd:*

$$\varepsilon(\sigma)=\begin{cases}1 & \text{als het aantal banen van } \sigma \text{ met een even lengte even is;}\\ -1 & \text{als het aantal banen van } \sigma \text{ met een even lengte oneven is.}\end{cases}$$

$\varepsilon(\sigma)$ *wordt de **pariteit** van de permutatie* σ *genoemd.*

De permutatie σ van $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ uit het voorbeeld hierboven heeft 1 baan van even lengte, en twee van oneven lengte. Derhalve is $\varepsilon(\sigma)=-1$.
Uit het bewijs van stelling 4.1.5 blijkt dat een permutatie van even pariteit kan geschreven worden als de samenstelling van een even aantal verwisselingen, en dat een permutatie van oneven pariteit kan geschreven worden als de samenstelling van een oneven aantal verwisselingen. We zullen nu aantonen dat, omgekeerd, de samenstelling van een (on)even aantal verwisselingen (on)even pariteit heeft. We bewijzen eerst volgend lemma:

Lemma 4.1.7. *Onderstel dat* $a,b\in A$ *en* $\sigma\in S(A)$*. Dan geldt dat*

$$\varepsilon([a,b]\circ\sigma)=-\varepsilon(\sigma)$$

Bewijs. Eerste geval: a en b liggen op dezelfde baan van σ. Schrijf deze baan als volgt:

$$[a=a_1,a_2,\ldots,a_i=b,\ldots,a_m]$$

We kunnen nu gemakkelijk verifieren dat (ga tewerk zoals in het bewijs van Stelling 4.1.5)

$$[a_1,a_i]\circ[a_1,\ldots,a_m]=[a_1,\ldots,a_{i-1}]\circ[a_i,\ldots,a_m]$$

De andere banen veranderen helemaal niet, en we zien dat de pariteit in elk geval verandert: als m even, dan hebben de twee nieuwe banen ofwel beiden even lengte, ofwel beiden oneven lengte, zodat het totaal aantal banen van even lengte ofwel met een toeneemt ofwel met een afneemt. Indien m oneven, dan heeft een van de twee nieuwe banen even lengte, en de andere oneven lengte, zodat het aantal banen met even lengte met een toeneemt.
Tweede geval: a en b liggen niet op eenzelfde baan van σ. Schrijf deze banen op als volgt:

$$[a=a_1,\ldots,a_m] \text{ en } [b=b_1,\ldots,b_r]$$

Nu is

$$[a_1, b_1] \circ [a_1, \ldots, a_m] \circ [b_1, \ldots, b_r] = [a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_r]$$

Alle andere banen blijven onveranderd. Op dezelfde manier als in het eerste geval verandert in elk geval de pariteit. □

Stelling 4.1.8. *Als $\sigma \in S(A)$ kan geschreven worden als de samenstelling van p verwisselingen, dan is*

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$$

De afbeelding $\varepsilon: S(A) \to \{-1, 1\}$ voldoet aan volgende eigenschap:

$$\varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$$

voor elke $\sigma, \tau \in S(A)$.

Bewijs. De eerste bewering volgt onmiddellijk uit lemma 4.1.7. De tweede volgt dan gemakkelijk uit de eerste: Als

$$\sigma = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_p \text{ en } \tau = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_q$$

met de σ_i en τ_j verwisselingen, dan is

$$\sigma \circ \tau = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_p \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_q$$

en

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^p, \ \ \varepsilon(\tau) = (-1)^q, \ \ \varepsilon(\sigma \circ \tau) = (-1)^{p+q}$$

en dit bewijst de tweede bewering. □

We noteren

$$A_n = \{\sigma \in S_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\}$$

A_n is een deelgroep van S_n die $n!/2$ elementen bevat, en wordt de **alternerende groep** van de verzameling $\{1, 2, \ldots, n\}$ genoemd.

4.2 De determinant van een vierkante matrix

De formules voor de determinant van een 2×2-matrix en een 3×3-matrix zijn welbekend:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

en

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

We willen deze definities uitbreiden tot $n \times n$-matrices. Alvorens we dit doen sommen we enkele eigenschappen op van de determinant van 3×3-matrices:

1. De determinant is lineair in elk van de kolommen:

$$\det\begin{pmatrix}\alpha a_{11}+\beta a'_{11} & a_{12} & a_{13}\\ \alpha a_{21}+\beta a'_{21} & a_{22} & a_{23}\\ \alpha a_{31}+\beta a'_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} = \alpha\det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} + \beta\det\begin{pmatrix}a'_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a'_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a'_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

   gelijkaardige formules hebben we voor de tweede en de derde kolom;

2. De determinant van een matrix met twee gelijke kolommen is nul;

3. De determinant van de eenheidsmatrix I_3 is 1.

Er is nog meer: de determinant is de enige functie die aan de drie bovenstaande eigenschappen voldoet. Laten we dit even aantonen. Onderstel dat een functie $f:\ \mathrm{M}_{3,3}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ voldoet aan de drie bovenstaande eigenschappen. Schrijf A_1, A_2, A_3 voor de drie kolommen van A, zodat we A kunnen schrijven als

$$A = (\, A_1 \quad A_2 \quad A_3 \,)$$

Merk eerst op dat f van teken wisselt als we twee kolommen van A met elkaar verwisselen:

$$\begin{aligned}
0 &= f\,(\, A_1+A_2 \quad A_1+A_2 \quad A_3 \,)\\
&= f\,(\, A_1 \quad A_1+A_2 \quad A_3 \,) + f\,(\, A_2 \quad A_1+A_2 \quad A_3 \,)\\
&= f\,(\, A_1 \quad A_1 \quad A_3 \,) + f\,(\, A_1 \quad A_2 \quad A_3 \,) + f\,(\, A_2 \quad A_1 \quad A_3 \,) + f\,(\, A_2 \quad A_2 \quad A_3 \,)\\
&= f\,(\, A_1 \quad A_2 \quad A_3 \,) + f\,(\, A_2 \quad A_1 \quad A_3 \,)
\end{aligned}$$

Schrijf

$$E_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Dan is

$$\begin{aligned}
A_1 &= a_{11}E_1 + a_{21}E_2 + a_{31}E_3\\
A_2 &= a_{12}E_1 + a_{22}E_2 + a_{32}E_3\\
A_3 &= a_{13}E_1 + a_{23}E_2 + a_{33}E_3
\end{aligned}$$

zodat

$$\begin{aligned}
f(A) &= f\,(\, A_1 \quad A_2 \quad A_3 \,)\\
&= f\,(\, a_{11}E_1 + a_{21}E_2 + a_{31}E_3 \quad a_{12}E_1 + a_{22}E_2 + a_{32}E_3 \quad a_{13}E_1 + a_{23}E_2 + a_{33}E_3 \,)\\
&= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{i1}a_{j2}a_{k3}\, f\,(\, E_i \quad E_j \quad E_k \,)
\end{aligned}$$

In de laatste stap maakten we gebruik van het feit dat f lineair is in de kolommen van A. We krijgen dus een som van in het totaal 27 termen waarvan er gelukkig heel wat wegvallen: indien minstens twee van de indexen i, j, k gelijk zijn, dan is $f\,(E_i \quad E_j \quad E_k\,) = 0$. De enige termen die overblijven zijn die waarvoor i, j en k verschillend zijn, of, met andere woorden, die waarvoor

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{bmatrix}$$

een permutatie is. Er zijn er zo zes, namelijk

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Uit eigenschap 3) hierboven volgt dat

$$f\,(E_1 \quad E_2 \quad E_3\,) = f(I_3) = 1$$

Verwisselen van telkens twee kolommen geeft achtereenvolgens:

$$\begin{aligned} f\,(E_1 \quad E_3 \quad E_2\,) &= -1 \\ f\,(E_3 \quad E_1 \quad E_2\,) &= 1 \\ f\,(E_3 \quad E_2 \quad E_1\,) &= -1 \\ f\,(E_2 \quad E_3 \quad E_1\,) &= 1 \\ f\,(E_2 \quad E_1 \quad E_3\,) &= -1 \end{aligned}$$

en dus is

$$\begin{aligned} f(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

De determinant van 3×3-matrices is dus volledig bepaald door de drie eigenschappen van hierboven. Ga zelf na dat we een zelfde redenering ook kunnen gebruiken om de formule voor de determinant van een 2×2-matrix te bepalen. We zullen ons hierop nu inspireren om de determinant van een $n \times n$-matrix te definiëren. Eerst enkele algemene definities:

Definitie 4.2.1. *Onderstel dat V, W vectorruimten zijn. Een afbeelding*

$$f:\ V^n \to W$$

*heet **multilineair** indien voor elke $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ geldt*

$$f(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \alpha\vec{v}_i + \beta\vec{v}_i', \ldots, \vec{v}_n) = \alpha f(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_n) + \beta f(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_i', \ldots, \vec{v}_n)$$

voor elke $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \vec{v}_i', \ldots, \vec{v}_n \in V$ en $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
*f wordt **alternerend** genoemd als $f(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = \vec{0}$ zodra $\vec{v}_i = \vec{v}_j$ voor twee verschillende indices i en j.*

We zullen deze definitie toepassen op $\mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, waarbij we de vectorruimten $\mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ en $(\mathbb{K}^n)^n$ met elkaar identificeren. We beschouwen een matrix A dus als een rij van kolommatrices:

$$A = (A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_n)$$

waarbij

$$A_i = (\,a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni}\,)^t$$

de i-de kolom van A is.

Stelling 4.2.2. *Onderstel dat de afbeelding $d:\ \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ multilineair en alternerend is. Dan gelden volgende eigenschappen:*

1. *$d(A)$ verandert van teken als we twee kolommen met elkaar verwisselen:*

$$d\,(A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_i \quad \cdots \quad A_j \quad \cdots \quad A_n) = -d\,(A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_j \quad \cdots \quad A_i \quad \cdots \quad A_n)$$

2. *$d(A)$ verandert niet als we bij een kolom een lineaire combinatie van de andere kolommen optellen:*

$$d\,(A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_i + \textstyle\sum_{j\neq i}\alpha_j A_j \quad \cdots \quad A_n) = d\,(A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_i \quad \cdots \quad A_n)$$

3. *$d(A) = 0$ als één van de kolommen van A gelijk is aan 0:*

$$d\,(A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad 0 \quad \cdots \quad A_n) = 0$$

4. *Als we de kolommen van A permuteren, dan wordt $d(A)$ vermenigvuldigd met de pariteit van de toegepaste permutatie:*

$$d\,(A_{\sigma(1)} \quad A_{\sigma(2)} \quad \cdots \quad A_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) d\,(A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_n)$$

   voor elke $\sigma \in S_n$.

5. *Als $\mathrm{rg}\,(A) < n$ dan is $d(A) = 0$.*

Bewijs. 1) Dit bewijs is volledig analoog aan het bewijs dat we hierboven zagen in het geval $n = 3$:

$$\begin{aligned}
0 &= d\,(A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_i + A_j \quad \cdots \quad A_i + A_j \quad \cdots \quad A_n)\\
&= d\,(A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_i \quad \cdots \quad A_i \quad \cdots \quad A_n) + d\,(A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_i \quad \cdots \quad A_j \quad \cdots \quad A_n)\\
&+ d\,(A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_j \quad \cdots \quad A_i \quad \cdots \quad A_n) + d\,(A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_j \quad \cdots \quad A_j \quad \cdots \quad A_n)\\
&= d\,(A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_i \quad \cdots \quad A_j \quad \cdots \quad A_n) + d\,(A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_j \quad \cdots \quad A_i \quad \cdots \quad A_n)
\end{aligned}$$

2) Uit de multilineariteit van d volgt:

$$\begin{aligned}
&d\,(A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_i + \textstyle\sum_{j\neq i}\alpha_j A_j \quad \cdots \quad A_n)\\
&\quad = d\,(A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_i \quad \cdots \quad A_n) + \sum_{j\neq i}\alpha_j\, d\,(A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_j \quad \cdots \quad A_n)
\end{aligned}$$

In de j-de term van deze laatste som zijn de i-de en de j-de kolom aan elkaar gelijk. Vanwege het alternerend zijn is dus elke term in deze som 0, en

$$d\,(A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_i + \textstyle\sum_{j\neq i} \alpha_j A_j \quad \cdots \quad A_n) = d\,(A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_i \quad \cdots \quad A_n)$$

3) Uit de multilineariteit volgt dat

$$d\,(A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad 0 \quad \cdots \quad A_n) = 0\,d\,(A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad 0 \quad \cdots \quad A_n) = 0$$

4) σ is de samenstelling van p verwisselingen, en $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$ (cf. stelling 4.1.8). Uit het eerste deel van de stelling volgt dat $d(A)$ van teken verandert telkens we een verwisseling op de kolommen toepassen. Na het toepassen van p verwisselingen wordt $d(A)$ dus vermenigvuldigd met $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$.
5) Dit volgt onmiddellijk uit 2) en 3): als $\mathrm{rg}\,(A) < n$, dan is één van de kolommen van A een lineaire combinatie van de overige:

$$A_i = \sum_{j\neq i} \alpha_j A_j$$

en dan is

$$\begin{aligned} d(A) &= d\,(A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad 0 + \textstyle\sum_{j\neq i} \alpha_j A_j \quad \cdots \quad A_n) \\ &= d\,(A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad 0 \quad \cdots \quad A_n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Definitie 4.2.3. *Een* ***determinantafbeelding***

$$\det :\ \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

is een afbeelding die voldoet aan de volgende voorwaarden:

1. det *is multilineair;*
2. det *is alternerend;*
3. $\det(I_n) = 1$.

We zullen hierna bewijzen dat er juist één determinantafbeelding $\mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ bestaat. Dit zal ons bovendien een expliciete formule voor de determinant opleveren.
Onderstel dat $\det :\ \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ een determinantafbeelding is. Neem een $n \times n$-matrix A. De j-de kolom van A kunnen we schrijven als

$$A_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} E_i$$

waarbij

$$E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gebruik makend van de multilineariteit van det vinden we dat

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{pmatrix} \\ &= \det\left(\textstyle\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} E_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n a_{i_2 2} E_{i_2}, \ldots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n n} E_{i_n} \right) \\ &= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \det\begin{pmatrix} E_{i_1} & E_{i_2} & \cdots & E_{i_n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dit is een som van n^n termen. Bekijk één van de termen apart, die in indices $i_1, i_2, \ldots, i_n$. Definieer

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$$

door $\sigma(j) = i_j$. Indien σ geen permutatie is, dan is

$$\det\begin{pmatrix} E_{i_1} & E_{i_2} & \cdots & E_{i_n} \end{pmatrix} = 0$$

omdat tenminste twee kolommen in de matrix aan elkaar gelijk zijn. Indien σ wel een permutatie is, dan volgt uit eigenschap 4) in stelling 4.2.2 dat

$$\det\begin{pmatrix} E_{i_1} & E_{i_2} & \cdots & E_{i_n} \end{pmatrix} = \varepsilon(\sigma) \det(I_n) = \varepsilon(\sigma)$$

We hebben dus dat

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \tag{4.2}$$

Stelling 4.2.4. *Er bestaat juist één determinantafbeelding* $\mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$*, en deze wordt gegeven door formule (4.2).*

Bewijs. We hebben hierboven reeds gezien dat als er een determinantafbeelding bestaat, dat deze dan gegeven wordt door formule (4.2). Er kan dus ten hoogste één determinantafbeelding bestaan. Om de stelling te bewijzen volstaat het dus om aan te tonen dat de afbeelding gedefinieerd door formule (4.2) voldoet aan de drie voorwaarden van definitie 4.2.3.
1) det is multilineair: elke term in (4.2) bevat juist 1 factor uit de j-de kolom. Dus is elke term lineair in de j-de kolom, en det is dus lineair in de j-de kolom, en dit voor elke j. det is dus multilineair.
2) det is alternerend. Onderstel voor de eenvoud dat de eerste twee kolommen van A aan elkaar gelijk zijn, het algemeen bewijs verloopt analoog. We hebben dus dat $A_1 = A_2$, of $a_{i1} = a_{i2}$ voor elke i.
Neem een $\sigma \in S_n$, en de term in (4.2) die correspondeert met σ:

$$\varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \tag{4.3}$$

De term die correspondeert met de permutatie $\tau = [\sigma(2), \sigma(1)] \circ \sigma$ is dan

$$\varepsilon(\tau) a_{\sigma(2)1} a_{\sigma(1)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \tag{4.4}$$

Omdat $\varepsilon(\tau) = -\varepsilon(\sigma)$ en $a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} = a_{\sigma(2)1} a_{\sigma(1)2}$ heffen (4.3) en (4.4) mekaar op. De $n!$ termen in (4.2) vallen dus twee bij twee tegenover mekaar weg, zodat het resultaat nul is.
3) Indien $A = I_n$, dan zijn alle termen in (4.2) 0, behalve degene waarvoor σ de identieke permutatie is. Alle factoren in deze term zijn 1 zodat $\det(I_n) = 1$. □

We hebben dus nu een unieke determinantafbeelding, die we vanaf nu de **determinant** zullen noemen. Verifieer zelf dat de formules voor de 2×2 en 3×3 determinant, waarvan we aan het begin van deze paragraaf vertrokken zijn, speciale gevallen zijn van (4.2). We zullen ook nog volgende notatie gebruiken:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Formule (4.2) laat in principe toe om de determinant te berekenen, maar als n groot wordt, dan is ze niet praktisch: inderdaad, het aantal termen ($n!$) wordt zeer snel groot. Daarom zullen we andere formules opstellen.

De determinant van de getransponeerde matrix

Stelling 4.2.5. *De determinant van een matrix is gelijk aan die van zijn getransponeerde:*

$$\det(A) = \det(A^t)$$

Bewijs.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)1} a_{\sigma^{-1}(2)2} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \det(A^t) \end{aligned}$$

Hierbij maakten we gebruik van het feit dat $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$ (zie stelling 4.1.8). □

Gevolg 4.2.6. *De eigenschappen uit stelling 4.2.2 gelden ook voor de rijen van een matrix:*

1. *De determinant is multilineair als functie van de rijen van A;*

2. $\det(A)$ *verandert van teken als we twee rijen met elkaar verwisselen;*

3. $\det(A)$ *verandert niet als we bij een rij een lineaire combinatie van de andere rijen optellen;*
4. $\det(A) = 0$ *als een van de rijen van A gelijk is aan* 0*;*
5. *Als we de rijen van A permuteren, dan wordt* $\det(A)$ *vermenigvuldigd met de pariteit van de toegepaste permutatie.*

De determinant van het product van matrices

Het is onze bedoeling te bewijzen dat de determinant van het product van twee matrices het product van de determinanten is. Eerst bewijzen we een hulpstelling:

Lemma 4.2.7. *Als* $d : \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *een multilineaire alternerende afbeelding is, dan is* $d = d(I_n)\det$.

Bewijs. Uit de redenering die voorafging aan het bewijs van stelling 4.2.4 volgt dat voor elke multilineaire alternerende afbeelding d geldt:

$$d(A) = \det(A)d(I_n)$$

□

Stelling 4.2.8. *Voor* $A, B \in \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ *geldt dat*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Bewijs. Neem $A \in \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ vast, en beschouw de afbeelding

$$d_A : \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

gegeven door

$$d_A(B) = \det(AB)$$

of

$$d_A\left(B_1 \quad B_2 \quad \cdots \quad B_n \right) = \det\left(AB_1 \quad AB_2 \quad \cdots \quad AB_n \right)$$

Het is eenvoudig om in te zien dat d_A multilineair en alternerend is, zodat, vanwege lemma 4.2.7,

$$d_A(B) = \det(B)d_A(I_n)$$

Nu is

$$d_A(I_n) = \det(A)$$

en daarom hebben we dat

$$\det(AB) = d_A(B) = \det(A)\det(B)$$

□

Gevolg 4.2.9. *Voor een* $n \times n$*-matrix A zijn de volgende eigenschappen equivalent:*

1. $\operatorname{rg}(A) = n$*;*

2. *A is regulier;*

3. $\det(A) \neq 0$.

Bewijs. 1) $\Longleftrightarrow$ 2) is stelling 2.7.9. 3) $\Longrightarrow$ 1) volgt uit stelling 4.2.2,5), door contrapositie. 2) $\Longrightarrow$ 3) volgt uit stelling 4.2.8: als A regulier is, dan bestaat A^{-1}, en dus is $1 = \det(I_n) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$, zodat $\det(A) \neq 0$. □

Merk op dat voor elke reguliere matrix A geldt dat

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \tag{4.5}$$

Gevolg 4.2.10. *Onderstel dat f een lineaire afbeelding is van een eindigdimensionale vectorruimte V naar zichzelf. Als E en F twee basissen zijn van V, dan is*

$$\det([f]_{E,E}) = \det([f]_{F,F})$$

Bewijs. Noteer de overgangsmatrix door M. In gevolg 2.6.6 hebben we bewezen dat

$$[f]_{F,F} = M^{-1}[f]_{E,E}M$$

zodat

$$\det([f]_{F,F}) = \det(M^{-1})\det([f]_{E,E})\det(M) = \det([f]_{E,E})$$

□

Gevolg 4.2.10 laat ons toe om de **determinant van een lineaire afbeelding** van een eindigdimensionale vectorruimte V naar zichzelf te definieren:

$$\det(f) = \det([f]_{E,E})$$

waarbij E een willekeurige basis van V is.

4.3 De ontwikkeling van de determinant volgens een rij of een kolom

De ontwikkeling van de determinant volgens een kolom

Beschouw een $n \times n$-matrix A. We willen een nieuw algoritme ontwikkelen om de determinant van A te berekenen. Zoals voorheen schrijven we

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}E_i$$

voor de j-de kolom van A. Gebruik makende van de multilineariteit van de determinant kunnen we dus schrijven:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det\left(A_1 \quad \cdots \quad A_{j-1} \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij}E_i \quad A_{j+1} \quad \cdots \quad A_n\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\det\left(A_1 \quad \cdots \quad A_{j-1} \quad E_i \quad A_{j+1} \quad \cdots \quad A_n\right)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Om $\det(A)$ te berekenen volstaat het dus om de determinanten

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \det\left(A_1 \quad \cdots \quad A_{j-1} \quad E_i \quad A_{j+1} \quad \cdots \quad A_n\right) \\
&= \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

te berekenen voor een vaste j en $i = 1, \dots, n$. De determinant A_{ij} wordt de **minor** van het element a_{ij} in de matrix A genoemd. We zullen hierna zien hoe we de minoren A_{ij} kunnen berekenen.
We merken eerst op dat

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \det\left(A_1 \quad \cdots \quad A_{j-1} \quad E_i \quad A_{j+1} \quad \cdots \quad A_n\right) \\
&= (-1)^{j-1}\det\left(E_i \quad A_1 \quad \cdots \quad A_{j-1} \quad A_{j+1} \quad \cdots \quad A_n\right)
\end{aligned}$$

Immers, om de j-de kolom E_i op de eerste plaats te krijgen moeten we $j-1$ verwisselingen van kolommen uitvoeren. Vervolgens brengen we de i-de rij op de eerste plaats. Hiertoe moeten we $i-1$ maal rijen verwisselen zodat

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\begin{vmatrix}
1 & a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\
0 & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
0 & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}$$

Door van elke kolom een gepast veelvoud van de eerste kolom af te trekken vinden we:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Het volgende lemma laat nu toe om A_{ij} te bepalen:

Lemma 4.3.1. *Voor elke $B \in \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ geldt dat*

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(B)$$

Bewijs. De afbeelding $d: \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ gedefinieerd door

$$d(B) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

is multilineair en alternerend. Bovendien is

$$d(I_n) = \det(I_{n+1}) = 1$$

zodat $d = \det$. $\square$

Als we bovenstaande argumenten samenvatten, dan krijgen we de volgende stelling:

Stelling 4.3.2. *Neem een $n \times n$-matrix A. De minor A_{ij} is dan de determinant van de matrix die ontstaat door uit A de i-de rij en de j-de kolom weg te laten:*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

De determinant van de matrix A wordt gegeven door de formule

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \tag{4.7}$$

*Deze formule wordt de **ontwikkeling van** $\det(A)$ **volgens de j-de kolom** genoemd.*

De ontwikkeling van de determinant volgens een rij

We passen formule (4.7) nu toe op de getransponeerde matrix A^t:

$$\det(A^t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}(A^t)_{ij}$$

$(A^t)_{ij}$ is de determinant die ontstaat door uit A^t de i-de rij en de j-de kolom te schrappen. Men kan evengoed uit A de j-de rij en de i-de kolom schrappen en dan transponeren, m.a.w. $(A^t)_{ij} = A_{ji}$, omdat de determinant van een matrix gelijk is aan de determinant van de getransponeerde (stelling 4.2.5), zodat

$$\det(A^t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}A_{ji}$$

Als we notationeel de rollen van i en j omwisselen (dus i een vaste index en j een sommatieindex), dan wordt deze formule:

$$\det(A) = \det(A^t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

Stelling 4.3.3. *Voor een $n \times n$-matrix A geldt:*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

voor elke $i = 1, \ldots, n$. Deze formule wordt de ***ontwikkeling van*** $\det(A)$ ***volgens de*** i***-de rij*** *genoemd.*

Stellingen 4.3.2 en 4.3.3 laten ons toe om de determinant van een matrix uit te rekenen. Zo is bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 8 & 2 \end{vmatrix} &= 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} \\ &= -4 - 0 + 48 = 44 \end{aligned}$$

Hierbij ontwikkelden we deze determinant volgens de eerste rij. Merk op dat we in feite niets winnen ten opzichte van de formule uit de definitie: we hebben nog steeds een som te berekenen van $6 = 3!$ termen, die elk een product zijn van drie elementen uit de matrix. Een alternatieve werkwijze is de volgende: gebruik makende van de eigenschappen van de determinant uit de vorige paragraaf, herleiden we de berekening tot de berekening van een determinant waarvan een rij of kolom op één element na uitsluitend nul bevat. Men ontwikkelt dan de determinant volgens die rij of kolom. Als we op deze manier bovenstaande determinant opnieuw uitrekenen, krijgen we

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -11 \\ 6 & -4 & -22 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -4 & -11 \\ -4 & -22 \end{vmatrix} = 88 - 44 = 44$$

In de eerste stap trokken we van de tweede kolom tweemaal de eerste af, en van de derde kolom viermaal de eerste. Zoals we gezien hebben (stelling 4.2.2) verandert dit de determinant niet. Daarna ontwikkelden we de determinant volgens de eerste rij.
Zoals we hierboven gezien hebben volstaat het om de minor A_{ij} te berekenen, om de i-de rij en de j-de kolom uit A te schrappen, de determinant te nemen en te vermenigvuldigen met $(-1)^{i+j}$. Men kan het teken makkelijk als volgt memoriseren:

$$\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

enzovoort. Het element in de linkerbovenhoek krijgt steeds een plusteken, en men vult de matrix dan met plus- en mintekens zoals een schaakbord.

De geadjungeerde van een matrix

Als toepassing van hetgeen voorafgaat zullen we een formule opstellen die ons toelaat om de inverse van een reguliere matrix te berekenen. De **geadjungeerde** van een vierkante matrix A is de matrix $\text{adj}(A)$ die ontstaat door elk element van de matrix te vervangen door zijn minor en daarna te transponeren. Het element op plaats (i, j) in $\text{adj}(A)$ is dus A_{ji}. Met deze notaties hebben we

Stelling 4.3.4. *Voor elke $n \times n$-matrix A geldt:*

$$\text{adj}(A)A = A\text{adj}(A) = \det(A)I_n$$

Bewijs. Het element op plaats (i, j) in het product $\text{adj}(A)A$ is

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj}$$

Voor $i = j$ is dit

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{ki} = \det(A)$$

door stelling 4.3.2. Eveneens gebruik makende van stelling 4.3.2 vinden we voor $i \neq j$ dat

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj} = \det\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_{i-1} & A_j & A_{i+1} & \cdots & A_{j-1} & A_j & A_{j+1} & \cdots & A_n \end{pmatrix} = 0$$

en dus is $\text{adj}(A)A = \det(A)I_n$. De andere gelijkheid wordt op analoge manier bewezen, gebruik makend van stelling 4.3.3. $\square$

Gevolg 4.3.5. *Als* $\det(A) \neq 0$, *dan is*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A)$$

Voorbeelden 4.3.6. 1) Beschouw weer de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

We hebben hierboven al gezien dat $\det(A) = 44$. Ga zelf na dat

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} -4 & 28 & -6 \\ 0 & -22 & 11 \\ 12 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

zodat

$$A^{-1} = \frac{1}{44} \begin{pmatrix} -4 & 28 & -6 \\ 0 & -22 & 11 \\ 12 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

2) We kunnen nu de algemene formule voor de inverse van een 2×2-matrix opschrijven:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

De regel van Cramer

Als toepassing van gevolg 4.3.5 zullen we nu een elegante formule opstellen voor de oplossing van een **stelsel van Cramer**. Dit is een lineair stelsel van n vergelijkingen met n onbekenden

$$AX = B$$

waarbij $A \in \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ regulier is. De unieke oplossing wordt gegeven door

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) B$$

Noteer

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

dan krijgen we

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{\det(A)} \sum_{j=1}^{n} A_{ji} b_j \\ &= \frac{\det\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_{i-1} & B & A_{i+1} & \cdots & A_n \end{pmatrix}}{\det(A)} \end{aligned}$$

waarbij we weer gebruik maakten van stelling 4.3.3. Deze laatste formule staat bekend als de **regel van Cramer**.

Stelling 4.3.7. *Als A een reguliere $n \times n$-matrix is, dan wordt de unieke oplossing van het lineaire stelsel $AX = B$ gegeven door de formule*

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Opmerking 4.3.8. De regel van Cramer is wel zeer elegant geformuleerd, en zeer nuttig voor theoretische doeleinden, maar in de praktijk is hij niet erg bruikbaar als n groot wordt (vb. $n \geq 1000$). De determinanten die dan in de formule voorkomen worden praktisch onberekenbaar, zelfs met een krachtige computer. Men gaat dan op zoek naar andere algoritmen om stelsels lineaire vergelijkingen numeriek op te lossen. We verwijzen hier naar de cursus “Numerieke algoritmen”.

Karakteriserende eigenschappen voor reguliere matrices

In de voorbije hoofdstukken hebben we heel wat eigenschappen gezien die de regulariteit van een matrix A karakteriseren. In de volgende eigenschap zetten we deze op een rijtje. Voor nog meer karakterisaties verwijzen we naar oefening 7.6.

Stelling 4.3.9. *Beschouw een vierkante matrix $A \in \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, en noteer m_A voor de lineaire afbeelding $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : X \mapsto AX$. Dan zijn de volgende eigenschappen equivalent:*

1. *A is regulier;*
2. *A heeft een linksinverse A': $A'A = I_n$;*
3. *A heeft een rechtsinverse A'': $AA'' = I_n$;*
4. *m_A is bijectief;*
5. *m_A is injectief;*
6. *m_A is surjectief ;*
7. *voor elke $B \in \mathbb{K}^n$ heeft het stelsel $AX = B$ een unieke oplossing;*
8. *$AX = 0$ heeft enkel $X = 0$ als oplossing;*
9. *voor elke $B \in \mathbb{K}^n$ heeft het stelsel $AX = B$ minstens één oplossing;*
10. $\mathrm{rg}\,(A) = n$;
11. *de kolommen van A zijn lineair onafhankelijk;*

12. $\mathrm{rg}(A^t) = n$*;*

13. de rijen van A zijn lineair onafhankelijk;

14. $\det(A) \neq 0$.

Bewijs. $1) \Longrightarrow 2),\ 1) \Longrightarrow 3)$ zijn triviaal.
$1) \Longleftrightarrow 4)$ is triviaal (zie definitie 2.5.5).
$4) \Longleftrightarrow 5) \Longleftrightarrow 6)$: dit is gevolg 2.2.13.
$2) \Longrightarrow 5)$. Voor $X_1, X_2 \in \mathbb{K}^n$ geldt

$$\begin{aligned} m_A(X_1) = m_A(X_2) &\Longrightarrow AX_1 = AX_2 \\ &\Longrightarrow X_1 = A'AX_1 = A'AX_2 = X_2 \end{aligned}$$

en dus is m_A injectief.
$3) \Longrightarrow 6)$. Voor elke $Y \in \mathbb{K}^n$ geldt dat $Y = AA''Y \in \mathrm{Im}(m_A)$, en dus is m_A surjectief.
$4) \Longleftrightarrow 7),\ 5) \Longleftrightarrow 8),\ 6) \Longleftrightarrow 9)$ zijn triviaal.
$1) \Longleftrightarrow 10) \Longleftrightarrow 14)$: dit is stelling 4.2.9.
$10) \Longleftrightarrow 11),\ 11) \Longleftrightarrow 12)$ zijn triviaal.
$10) \Longleftrightarrow 12)$ volgt uit stelling 2.7.8.
$12) \Longleftrightarrow 13)$ is $10) \Longleftrightarrow 11)$ toegepast op A^t. □

Beschouw nu een stelsel van n vergelijkingen in n onbekenden:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &=& b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &=& b_2 \\ \vdots && \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &=& b_n \end{array} \right. \tag{4.8}$$

of, in matrixvorm, $AX = B$. Onderstel dat (4.8) een oplossing heeft. Voeg nu aan (4.8) een vergelijking toe:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &=& b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &=& b_2 \\ \vdots && \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &=& b_n \\ a_{n+1,1}x_1 + a_{n+1,2}x_2 + \cdots + a_{n+1,n}x_n &=& b_{n+1} \end{array} \right. \tag{4.9}$$

Wanneer heeft dit nieuwe uitgebreide stelsel nog een oplossing?

Stelling 4.3.10. *Als (4.9) een oplossing heeft, dan is*

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} & b_{n+1} \end{vmatrix} = 0$$

Omgekeerd, indien $\det(A) \neq 0$ *en* $D = 0$*, dan heeft (4.9) een unieke oplossing.*

Bewijs. Onderstel dat $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ een oplossing is van (4.9). Dan is $X' = (x_1, x_2, \ldots, x_n, -1)$ een oplossing is van het homogene stelsel

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1x_{n+1} & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2x_{n+1} & = & 0 \\ \vdots & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_nx_{n+1} & = & 0 \\ a_{n+1,1}x_1 + a_{n+1,2}x_2 + \cdots + a_{n+1,n}x_n + b_{n+1}x_{n+1} & = & 0 \end{array}\right. \tag{4.10}$$

Deze oplossing is verschillend van 0, en dus is de determinant D van het stelsel (4.10) gelijk aan 0. Omgekeerd, indien $\det(A) \neq 0$, dan heeft (4.8) een unieke oplossing. (4.9), met een vergelijking meer, heeft dus ten hoogste één oplossing.
Omdat $D = 0$ bezit (4.10) een van nul verschillende oplossing $(y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1})$. Indien $y_{n+1} \neq 0$, dan is

$$\left(-\frac{y_1}{y_{n+1}}, -\frac{y_2}{y_{n+1}}, \ldots, -\frac{y_n}{y_{n+1}}\right)$$

een oplossing van (4.9), en dan is de stelling bewezen. Indien $y_{n+1} = 0$, dan is $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ een niet-triviale oplossing van het stelsel $AX = 0$. Dit is onmogelijk aangezien $\det(A) \neq 0$. $\square$

Bijlage A

Verzamelingen en functies

Hierna zullen we een aantal basisbegrippen uit de verzamelingenleer herhalen. De meeste begrippen heb je misschien vroeger gezien, en ze werden reeds herhaald in het eerste hoofdstuk van de cursus “Wiskundige Analyse”. De uiteenzetting die volgt is trouwens grotendeels gelijklopend met die van de aangehaalde cursus. Alleen zijn er enkele formele aspecten die we extra zullen benadrukken, omdat ze voor deze cursus van belang zijn.

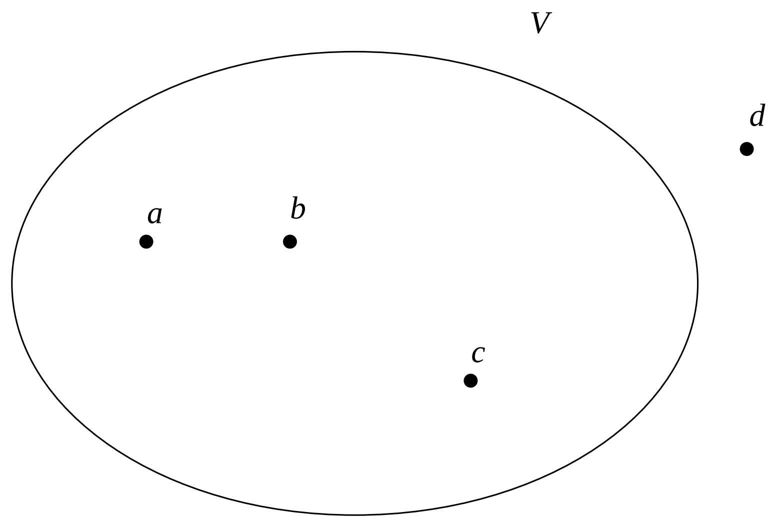
A.1 Het begrip verzameling

Het begrip **verzameling** ligt aan de gehele wiskunde ten grondslag en is daarom moeilijk te definiëren. Men kan het als volgt omschrijven: een verzameling is een vereniging van zaken, voorwerpen, dingen,... Hetgeen tot de verzameling behoort noemt men **element** van de verzameling. Een verzameling is gegeven of bepaald als het mogelijk is te zeggen of een element tot de verzameling behoort of niet. Men kan op verschillende manieren aanduiden welke dingen element zijn van een verzameling: men kan een lijst opstellen van de elementen, of men kan de elementen bepalen door hun kenmerkende eigenschap(pen).

Voorbeelden A.1.1. $V = \{a,b,c\}$; de verzameling V bestaat uit de elementen a, b, en c;
de verzameling van de studenten van een klas;
de verzameling van de klassen van een school (de elementen van een verzameling kunnen zelf verzamelingen zijn);
de natuurlijke getallen $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$
Men kan een verzameling ook karakteriseren binnen een gegeven verzameling door een eigenschap van de elementen op te geven. Zo kunnen we bijvoorbeeld de verzameling van de natuurlijke getallen deelbaar door 3 als volgt opschrijven: $V = \{n \in \mathbb{N} \mid n \textit{ is deelbaar door } 3\}$.
De verzameling van de “mooie schilderijen” bestaat niet. We kunnen namelijk niet bepalen of een element al dan niet tot de verzameling behoort (wat is mooi?).
De lege verzameling (deze bezit geen enkel element) wordt $\varnothing$ genoteerd.

Opmerkingen A.1.2. 1) Er bestaan twee soorten verzamelingen: eindige verzamelingen en oneindige verzamelingen. Als A een eindige verzameling is, dan noteren we $\#A$ voor het aantal

elementen in A.
2) De volgorde waarin de elementen van een verzameling voorkomen heeft geen belang: zo is $\{a,b,c\} = \{b,a,c\}$. Merk ook op dat een element slechts eenmaal voorkomt: alle elementen in de verzameling zijn verschillend. In Figuur A.1 stellen we een verzameling voor met een Venn-diagram.



Figuur A.1: De verzameling $\{a,b,c\}$ voorgesteld met een Venn-diagram

Deelverzamelingen

Per definitie stellen we dat een verzameling A een *deelverzameling* is van een verzameling B indien elk element van A een element is van B:

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall a \in A : a \in B$$

Voorbeeld: $\{a,b\} \subset \{a,b,c\}$

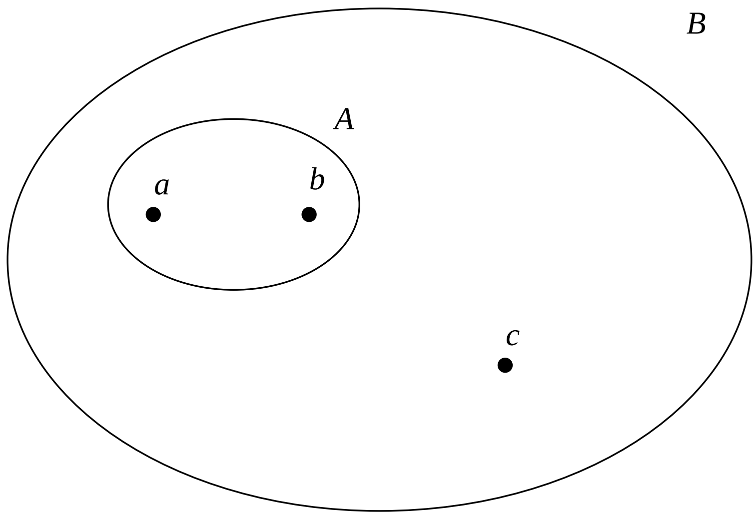
De lege verzameling is een deelverzameling van elke verzameling.

A.2 Bewerkingen met verzamelingen

De vereniging

De vereniging (of unie) van twee verzamelingen A en B is de verzameling van de elementen die tot A of tot B behoren:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \; of \; x \in B\}$$



Figuur A.2: Deelverzamelingen

Bewijs zelf de volgende eigenschappen:

$$\begin{aligned} A \cup \varnothing &= \varnothing \cup A = A \\ A \cup B &= B \cup A \quad \text{(commutativiteit)} \\ A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \quad \text{(associativiteit)} \\ A \cup A &= A \end{aligned}$$

Beschouw een rij verzamelingen $A_1, A_2, A_3, \ldots$. We definiëren de unie van deze rij verzamelingen als volgt:

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots = \{x \mid x \in A_i \text{ voor minstens 1 index } i\}$$

Voorbeeld

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} [-n, n] = \mathbb{R}$$

De doorsnede

De doorsnede van twee verzamelingen A en B is de verzameling van de elementen die tot A en B behoren:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \in B\}$$

Bewijs zelf de volgende eigenschappen:

$$\begin{aligned} A \cap \varnothing &= \varnothing \cap A = \varnothing \\ A \cap B &= B \cap A \quad (commutativiteit) \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \quad (associativiteit) \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{rcl}
A \cap A & = & A \\
A \cup (B \cap C) & = & (A \cup B) \cap (A \cup C) \\
A \cap (B \cup C) & = & (A \cap B) \cup (A \cap C) \\
A \subset B & \Longleftrightarrow & A \cap B = A \\
 & \Longleftrightarrow & A \cup B = B
\end{array}
$$

Beschouw een rij verzamelingen $A_1, A_2, A_3, \ldots$. We definiëren de doorsnede van deze rij verzamelingen als volgt:

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots = \{x \mid x \in A_i \text{ voor elke index } i\}$$

Voorbeeld

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} [0, \frac{1}{n}] = \{0\}$$

Het verschil

Het verschil van twee verzamelingen A en B is de verzameling van de elementen van A die niet tot B behoren:

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

Het product

Het product van twee verzamelingen A en B is de verzameling van de koppels (a, b) waarbij $a \in A$ en $b \in B$:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \; en \; b \in B\}$$

A.3 Functies

Definitie A.3.1. *Gegeven zijn twee verzamelingen X en Y. Onderstel dat met ieder element $x \in X$ een enig element $y \in Y$ overeenstemt. De verzameling f van de koppels (x, y) noemt men een **functie** of afbeelding van X naar Y. Men kan een functie van X naar Y dus ook definiëren als een deelverzameling van $X \times Y$ zodanig dat elk element van X juist eenmaal optreedt als eerste element in een koppel. Men noteert*

$$f: X \longrightarrow Y$$

Het element y van Y dat met $x \in X$ overeenstemt, noteert men $f(x)$, en men noemt $f(x)$ het **beeld** van x. We kunnen dus schrijven:

$$f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

Liever gebruiken we de notatie:

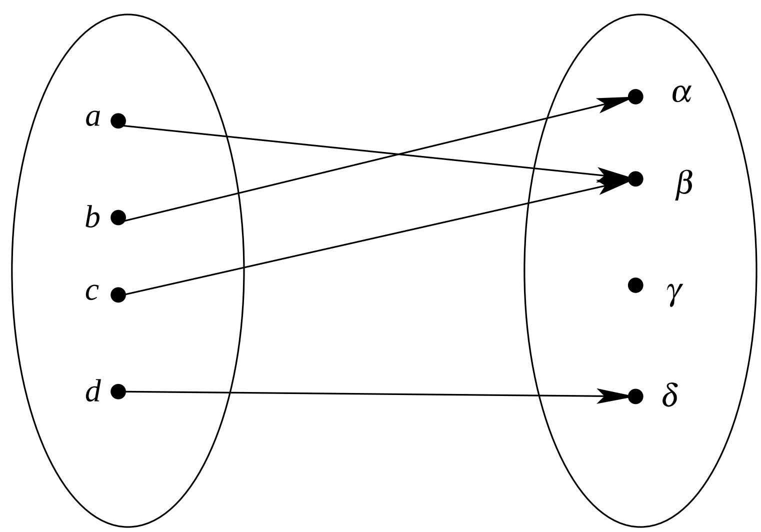
$$f : X \longrightarrow Y : x \longmapsto y = f(x)$$

Een functie is dus volledig bepaald als men de verzameling koppels $(x, f(x))$ voor elke $x \in X$ geeft. Twee functies f en g van X naar Y zijn **identiek** als voor iedere $x \in X$ geldt dat $f(x) = g(x)$.
X noemt men de **definitieverzameling** of het **domein** van f. Y noemt men de **variatieverzameling** of de **waardeverzameling** van f.

Voorbeelden A.3.2. 1) $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

$$f(a) = \beta \; ; \; f(b) = \alpha \; ; \; f(c) = \beta \; , f(d) = \delta$$

f bestaat dus uit de koppels $(a, \beta), (b, \alpha), (c, \beta), (d, \delta)$. We kunnen f voorstellen op een Venn-diagram (zie Figuur A.3)



Figuur A.3: Functies en Venn-diagrammen

2) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2 = f(x)$
3) $f : X \longrightarrow X : x \longmapsto x = f(x)$
Deze functie noemt men de **identiteit** op de verzameling X en noteert men meestal 1_X.

Opmerkingen A.3.3. 1) We maken geen onderscheid tussen de begrippen functie en afbeelding.
2) Niet ieder element van Y is noodzakelijk het beeld van een element uit X (zie voorbeelden 1) en 2)).
3) Het is belangrijk om in te zien dat er een verschil is tussen f en $f(x)$. f staat voor de functie (en is dus een verzameling pijlen of puntenkoppels), terwijl $f(x)$ staat voor het beeld van x in Y. $f(x)$ is dus een element van de verzameling Y.
4) Onderstel dat een functie $f : X \to Y$ gegeven is en dat A een deelverzameling is van X. We

kunnen dan de **beperking** van f tot A beschouwen: we bekijken enkel die puntenkoppels die tot de functie f behoren waarvan het eerste element tot de verzameling A behoort. We noteren deze nieuwe functie door $f_{|A}$. We hebben dus een nieuwe functie

$$f_{|A}:\ A \longrightarrow Y$$

Voor $a \in A$ hebben we dus dat $f_{|A}(a) = f(a)$. In vele gevallen is het niet de moeite om verschillende notaties te gebruiken voor f en $f_{|A}$. Soms blijkt dit wel van belang te zijn.

Zij A en B twee verzamelingen. We noteren

$$B^A = \{f \mid f:\ A \longrightarrow B \text{ is een functie}\}$$

voor de verzameling van alle functies van A naar B. De keuze van deze notatie werd geïnspireerd door de volgende eigenschap.

Stelling A.3.4. *Beschouw twee eindige verzamelingen A en B. Het aantal functies van A naar B is gelijk aan $(\#B)^{\#A}$, met andere woorden*

$$\#(B^A) = (\#B)^{\#A} \tag{A.1}$$

Bewijs. We gaan als volgt tewerk: we bewijzen eerst dat (A.1) geldig is als $\#A = 1$. Daarna bewijzen we dat, in de onderstelling dat (A.1) geldt voor $\#A = n$, ze ook geldt voor $\#A = n+1$. Achtereenvolgens is de formule dan geldig voor $\#A = 1, 2, 3, \ldots$. Men noemt zulk een bewijs een bewijs per inductie.
Neem $\#A = 1$, m.a.w. $A = \{a\}$. Een functie van A naar B bestaat dan uit slechts 1 pijl, namelijk (a, b), waarbij $b \in B$. Het aantal functies van A naar B is dan gelijk aan het aantal elementen in B, en is dus gelijk aan $(\#B)^{\#A}$.
Onderstel nu dat de formule geldt voor $\#A = n$, en neem een verzameling A met $n+1$ elementen. Neem $a \in A$, en stel $A' = A \setminus \{a\}$. A' bevat nu n elementen zodat het aantal functies van A' naar B is gelijk aan $(\#B)^n$. Een functie $f':\ A' \to B$ kan op $\#B$ manieren worden uitgebreid tot een functie $f:\ A \to B$. Immers, we hoeven enkel het beeld van a vast te leggen om een gegeven functie f' uit te breiden tot f, en er zijn hiervoor $\#B$ mogelijkheden (namelijk alle elementen van B). Het totaal aantal functies $A \to B$ is dus

$$(\#B)^n \#B = (\#B)^{n+1} = (\#B)^{\#A}$$

$\square$

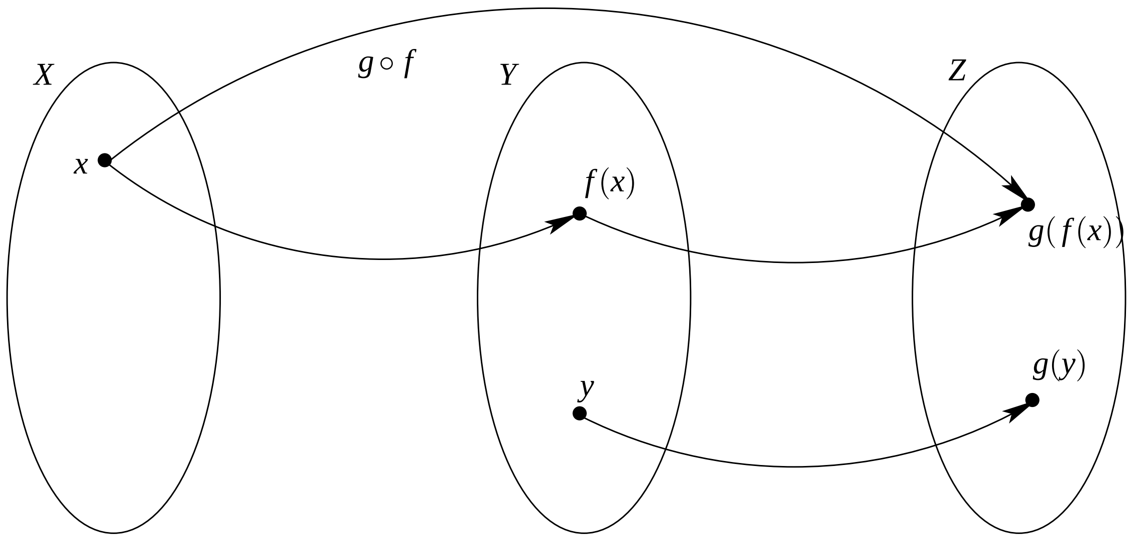
Zij $[a, b] \subset \mathbb{R}$ een interval, en beschouw de verzameling $\mathbb{R}^{[a,b]}$ van alle functies van $[a, b]$ naar $\mathbb{R}$. Deze verzameling is zo immens groot, dat het onmogelijk is om ze in haar geheel te bestuderen. Bovendien bevat $\mathbb{R}^{[a,b]}$ ook een groot aantal functies die zich zo wild gedragen dat ze in de praktijk minder belangrijk blijken. Daarom beperkt men zich tot een deelverzameling van $\mathbb{R}^{[a,b]}$. In de Analyse kijkt men haast uitsluitend naar continue functies. In deze cursus beperken we ons nog verder, en beschouwen we hoofdzakelijk functies die lineair zijn.

A.4 Injecties, surjecties en bijecties

Gegeven zijn twee functies $f : X \longrightarrow Y$ en $g : Y \longrightarrow Z$. We definiëren een nieuwe functie g na f, of g “bolletje” f, genoteerd $g \circ f : X \longrightarrow Z$ door

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

voor elke $x \in X$. We noemen $g \circ f$ de **samenstelling** van de functies f en g. Merk op dat de samen-



Figuur A.4: Samengestelde functies

stelling van functies associatief is, maar *niet* commutatief; dit blijkt uit het volgende voorbeeld:

Voorbeeld A.4.1.

$$\begin{aligned} f &= \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}: x \longmapsto x^2 \\ g &= \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}: x \longmapsto ax+b \\ g \circ f &= \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}: x \longmapsto ax^2+b \\ f \circ g &= \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}: x \longmapsto (ax+b)^2 \end{aligned}$$

De inverse functie

Noteer 1_X voor de identiteit op de verzameling X. Deze wordt gedefinieerd als volgt:

$$\forall x \in X \ : \ 1_X(x) = x$$

Merk op dat voor elke functie $f : X \longrightarrow Y$ geldt dat $f \circ 1_X = f$ en $1_Y \circ f = f$. Bestaat er een functie $g : Y \longrightarrow X$ zodanig dat $f \circ g = 1_Y$ en $g \circ f = 1_X$? Een eerste idee om dit probleem op te lossen is gewoon: keer alle pijlen van f om. We krijgen dan echter niet noodzakelijk opnieuw een functie! Om een functie te hebben moeten twee voorwaarden vervuld zijn:

- g moet *welbepaald* zijn: in elk punt van Y moet een pijl van g vertrekken, of, wat hetzelfde is, in elk punt van Y moet een pijl van f aankomen;
- g moet *éénduidig* zijn: in elk punt van Y mag ten hoogste één pijl van g vertrekken, of, wat hetzelfde is, mag ten hoogste één pijl van f aankomen. Dit betekent ook nog dat twee verschillende elementen van X op twee verschillende elementen van Y afgebeeld worden. Vandaar de volgende definities:

Definitie A.4.2. *Een functie $f:X \longrightarrow Y$ heet **surjectief** als elk element van Y het beeld is van een element van X, m.a.w.,*

$$\forall y \in Y,\ \exists x \in X : f(x) = y$$

Definitie A.4.3. *Een functie $f:X \longrightarrow Y$ heet **injectief** als elk element van Y het beeld is van ten hoogste één element van X, m.a.w.,*

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

of

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Definitie A.4.4. *Een functie $f:X \longrightarrow Y$ heet **bijectief** als f zowel injectief als surjectief is, of*

$$\forall y \in Y, \exists!\, x \in X \ : \ f(x) = y$$

of er bestaat een $g \ : \ Y \ \longrightarrow \ X$ zodanig dat $f \circ g = 1_Y$ en $g \circ f = 1_X$.
*Een bijectie van een verzameling A naar zichzelf wordt ook een **permutatie** van A genoemd.*

We noteren in dit geval $g = f^{-1}$, en we noemen f^{-1} de **inverse functie** van f. We zeggen dan dat f **inverteerbaar** is, en we hebben de eigenschap:

$$\forall y \in Y \ : \ f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

Opmerkingen A.4.5. 1) Van een functie $f \ : \ X \ \longrightarrow \ Y$ kan men een surjectie maken door de variatieverzameling te beperken tot $\{y \in Y \mid \exists x \in X \ : \ f(x) = y\}$. Men kan er een injectie van maken door de definitieverzameling X zo te beperken dat in elk element van Y slechts één pijl aankomt.
2) Voor $B \subset Y$ noteert men

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

Indien f geen bijectie is, noteert men soms ook voor $y \in Y$:

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$$

Stelling A.4.6. *Onderstel dat A en B eindige verzamelingen zijn en dat $m = \#B \geq n = \#A$. Het aantal injecties van A naar B is dan*

$$m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Het aantal permutaties van A gelijk aan $n!$.

Bewijs. We bewijzen dit per inductie op $n = \#A$. Voor $\#A = 1$ is de formule duidelijk. In dit geval is het aantal functies van A naar B gelijk aan $m = \#B$. Bovendien is elke functie in dit geval een injectie, en de formule volgt.
Onderstel nu dat de formule waar is voor willekeurige m en voor $\#A = n$. Onderstel nu dat A $n+1$ elementen bevat en dat $n+1 \leq m$. We stellen weer $A' = A \setminus \{a\}$ waarbij $a \in A$ vast gekozen is. Het aantal injecties van A' naar B is nu $m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$, door de inductiehypothese. Een gegeven injectie $f' : A' \to B$ kan op $m-n$ manieren uitgebreid worden tot een injectie $f : A \to B$. Immers, de beelden van de elementen van A' bezetten reeds n plaatsen in B, zodat er voor het beeld van a slechts $m-n$ keuzemogelijkheden overblijven. Het totaal aantal injecties $A \to B$ is dus $m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(m-n)$, en dit bewijst de eerste formule.
Hieruit volgt ook onmiddellijk dat het aantal injecties van A naar zichzelf gelijk is aan $n!$. Een injectie van een eindige verzameling naar zichzelf is automatisch ook surjectief, en dus is het aantal bijecties van A naar zichzelf gelijk aan $n!$. $\square$

Oefeningen

Reeks 1

Oefening 1.1. Gegeven zijn $a,a',a'',b,b',b'',c,c',c'' \in \mathbb{R}$. Toon aan dat de oplossingen (x,y,z) van het stelsel

$$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \\ a''x+b''y+c''z=0 \end{cases}$$

een deelruimte van $\mathbb{R}^3$ vormen.

Oefening 1.2. Stel $V=\mathscr{C}([a,b])=\{f\colon [a,b]\to\mathbb{R} \mid f \text{ continu}\}$. Welk van de volgende verzamelingen zijn deelruimten van V?

1a $\{f\in\mathscr{C}([a,b]) \mid f(x)\geq 0, \forall x\}$;

1b $\{f\in\mathscr{C}([a,b]) \mid f \text{ is een constante functie}\}$;

1c $\{f\in\mathscr{C}([a,b]) \mid f(a)=0\}$;

2a $\{f\in\mathscr{C}([a,b]) \mid f(a)=5\}$;

2b $\{f\in\mathscr{C}([a,b]) \mid f \text{ heeft overal een eindige afgeleide}\}$;

2c $\{\alpha+\beta\sin(x) \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$;

3a $\{f\in\mathscr{C}([a,b]) \mid f'(1)=0\}$ (onderstel $1\in[a,b]$ en f afleidbaar in 1);

3b $\{f\in\mathscr{C}([a,b]) \mid f'(0)=1\}$ (onderstel $0\in[a,b]$ en f afleidbaar in 0);

3c $\{f\in\mathscr{C}([a,b]) \mid f(\frac{a+b}{2}+x)=f(\frac{a+b}{2}-x)\}$;

4a $\{f\in\mathscr{C}([a,b]) \mid f(a)=f(b)\}$;

4b $\{f\in\mathscr{C}([a,b]) \mid f \text{ heeft een rechterafgeleide in } a \text{ en die is gelijk aan } f(b)\}$;

4c $\{f\in\mathscr{C}([a,b]) \mid f \text{ is tweemaal afleidbaar in } a \text{ en } f(a)+f'(a)+f''(a)=0\}$;

5a $\{f\in\mathscr{C}([a,b]) \mid f \text{ is tweemaal afleidbaar in } a \text{ en } f(a)+f'(a)+f''(a)=1\}$;

5b $\{f\in\mathscr{C}([a,b]) \mid f(a)\in\mathbb{Q}\}$;

5c $\{f\in\mathscr{C}([a,b]) \mid f(a)\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}$.

Oefening 1.3. Welk van de volgende verzamelingen zijn deelruimten van de vectorruimte $\mathbb{R}[X]$?

1a $\{P\in\mathbb{R}[X] \mid \mathrm{gr}(P) \text{ even}\}$;

1b $\{P\in\mathbb{R}[X] \mid P'(X)=0\}$;

1c $\{a+bX^3 \mid a,b \in \mathbb{R}\}$;

2a $\{a+bX+cX^2+dX^3 \mid a+b+c+d=0\}$;

2b $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid 1$ is een nulpunt van $P\}$;

2c $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \mathrm{gr}(P) > 2\}$;

3a $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \mathrm{gr}(P) < 2\}$;

3b $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \mathrm{gr}(P) = 2\}$;

3c $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid$ de rest bij deling door X^2+X+1 is $0\}$;

4a $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid$ de rest bij deling door X^2+X+1 is $1\}$;

4b $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \mathrm{gr}(P)$ is oneven$\}$;

4c $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(X) = P(-X)\}$.

Oefening 1.4.a Een goniometrische veelterm is een functie van de vorm

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{i} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Toon aan dat de verzameling der goniometrische veeltermen een vectorruimte is.

Oefening 1.4.b We noteren met $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de verzameling van alle rijtjes met waarden in $\mathbb{R}$. Op $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definiëren we de volgende bewerkingen:

$$\begin{aligned} (a_0,a_1,\cdots)+(b_0,b_1,\cdots) &= (a_0+b_0,a_1+b_1,\cdots) \\ \alpha(a_0,a_1,\cdots) &= (\alpha a_0, \alpha a_1, \cdots) \end{aligned}$$

voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ en $(a_0,a_1,\cdots),(b_0,b_1,\cdots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Toon aan dat $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ een vectorruimte is.

Oefening 1.4.c Een functie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ wordt een trapfunctie genoemd indien er een partitie $P = (a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b)$ zodat f constant is op elk van de intervallen (x_{i-1},x_i), voor $i = 1,2,\cdots,m$. Toon aan dat de verzameling van de trapfuncties op $[a,b]$ een vectorruimte vormen.

Oefening 1.5. Welk van de volgende verzamelingen zijn deelruimten van $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

1a De verzameling der begrensde rijtjes;

1b de verzameling der rijtjes waarvan de limiet 1 is;

1c de verzameling der rijtjes waarvan de limiet 0 is;

2a de verzameling der rijtjes waarvan slechts een eindig aantal termen verschillend van nul zijn;

2b de verzameling der rijtjes waarvan de eerste tien termen allemaal nul zijn;

2c de verzameling der rijtjes waarvan de tweehonderdste term 0 is;

3a de verzameling der rijtjes waarvan de tweehonderdste term 1 is;

3b de verzameling van alle convergente rijtjes;

3c de verzameling van alle divergente rijtjes.

Oefening 1.6. Welke van de volgende deelverzamelingen van $\mathbb{R}^3$ zijn lineair onafhankelijk?

1a $\{(0,0,0)\}$;

1b $\{(1,1,1),(2,2,2)\}$;

1c $\varnothing$;

2a $\{(1,1,0),(0,2,3),(1,2,3),(3,6,6)\}$;

2b $\{(1,1,0),(3,4,2)\}$;

2c $\{(1,1,0),(0,2,3),(1,2,3),(0,0,0)\}$

Oefening 1.7. Welke van de volgende deelverzamelingen van $\mathbb{R}[X]$ zijn lineair onafhankelijk?

1a $\{1,X,X^2\}$;

1b $\{0,X\}$;

1c $\{X^6,X^6+1,X^6+2\}$;

2a $\{X^2+1,X^2-1,X\}$;

2b $\{1,X+1,X-1,X^2-1,X^2+1\}$;

2c $\{X^2+X+1,X^2-X-1,X+1\}$

Oefening 1.8. Welke van de volgende deelverzamelingen van $\mathscr{C}([a,b])$ zijn lineair onafhankelijk?

1a $\{\cos(x),\sin(x),e^x\}$; $[a,b]=[0,2\pi]$

1b $\{x^2,e^x\}$;

1c $\{\cos^2(x),\sin^2(x),\cos(2x)\}$;

2a $\{\sin(x),\cos(x),\operatorname{tg}(x)\}$ $([a,b]=[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}])$;

2b $\{\operatorname{tg}^2(x),\sec^2(x),3\}$ $([a,b]\subset(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}))$;

2c $\{1,x,xe^x\}$

Reeks 2

Oefening 2.1. Welke van de volgende verzamelingen veeltermen brengen $\mathbb{R}_2[X]$ voort?

1a $\{1, X, X^2\}$;

1b $\{1, X-1, (X-1)^2\}$;

1c $\{X^2+1, X^2+X, X+1\}$;

2a $\{X^2+1, X-1, X^2+X\}$;

2b $\{X^2+2, 2X^2-X+1, X+2, X^2+X+4\}$;

2c $\{X^2+2X-1, X^2-1\}$.

Oefening 2.2.a Onderstel dat $S = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ lineair onafhankelijk is in een vectorruimte V. Neem nu

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 \\ \vec{b}_2 &= \vec{a}_2 + \vec{a}_3 \\ \vec{b}_3 &= \vec{a}_3 \end{aligned}$$

Bewijs dat $T = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ ook lineair onafhankelijk is.

Oefening 2.2.b Onderstel dat $S = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ lineair onafhankelijk is in een vectorruimte V. Neem nu

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3 \\ \vec{b}_2 &= \vec{a}_2 + 2\vec{a}_3 \\ \vec{b}_3 &= \vec{a}_3 \end{aligned}$$

Bewijs dat $T = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ ook lineair onafhankelijk is.

Oefening 2.2.c Onderstel dat $S = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ lineair onafhankelijk is in een vectorruimte V. Onderstel nu dat

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3 \\ \vec{a}_2 &= \vec{b}_2 + \vec{b}_3 \\ \vec{a}_3 &= \vec{b}_3 \end{aligned}$$

Bewijs dat $T = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ ook lineair onafhankelijk is.

Oefening 2.3. Vind een basis voor de volgende deelruimten van $\mathbb{R}^4$:

1a $\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = 0\}$;

1b $\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = b = 0\}$;

1c $\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a+b+c+d=0\}$;

2a $\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a=c \text{ en } b=d\}$;

2b $\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid d=a+b\}$;

2c $\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid d=a+b \text{ en } c=a-b\}$.

Oefening 2.4. Vind een basis voor

1a $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1)=0\}$;

1b $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P'(X)=0\}$;

1c $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P'(1)=0\}$;

2a $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P''(X)=0\}$;

2b $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P''(1)=0\}$;

2c $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1)=P(2)\}$.

Oefening 2.5. Som alle deelruimten van $\mathbb{R}^3$ op.

Oefening 2.6. We werken in $V=\mathscr{C}[-a,a]$. Stel

$$\begin{aligned} W_1 &= \{f \in \mathscr{C}[-a,a] \mid f(x)=f(-x), \forall x \in [-a,a]\} \\ W_2 &= \{f \in \mathscr{C}[-a,a] \mid f(x)=-f(-x), \forall x \in [-a,a]\}. \end{aligned}$$

Bewijs achtereenvolgens dat

1. W_1, W_2 zijn deelruimten van V;
2. $W_1 \cap W_2 = \{0\}$;
3. $W_1 \oplus W_2 = V$.

Oefening 2.7. Beschouw een vectorruimte V, $X \subset V$, en $\vec{x}, \vec{y} \in V$. Bewijs dat $\vec{y} \in \operatorname{vect}(X \cup \{\vec{x}\})$ en $\vec{y} \notin \operatorname{vect}(X)$ impliceren dat $\vec{x} \in \operatorname{vect}(X \cup \{\vec{y}\})$.

Oefening 2.8. Bewijs dat de veeltermen

$$\{\binom{x}{k} \mid k=0,1,\cdots,n\}$$

een basis vormen voor $\mathbb{R}_n[x]$. Gebruik hiervoor inductie op n. Herinner tevens dat

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!};$$

voor $k \geq 1$ en $\binom{x}{0}=1$.

Reeks 3

Oefening 3.1. Welk van de volgende afbeeldingen zijn lineaire afbeeldingen?

1a $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door
$$f(a,b) = (a,b,a+b)$$

1b $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door
$$f(a,b) = (a+b,b,a-b)$$

1c $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door
$$f(a,b,c) = (b,c,a)$$

2a $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door
$$f(a,b,c) = (a,b^2+c^3,a+b)$$

2b $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door
$$f(a,b,c) = (0,c,a)$$

2c $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door
$$f(a) = (1,a,a^2)$$

3a $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door
$$f(a) = (1,a,a)$$

3b $f:\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door
$$f(a,b,c,d) = (a+b+c+d,a+b-1)$$

3c $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door
$$f(a,b,c) = a^2+b^2+c^2$$

Oefening 3.2.a $f:\ \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ is een lineaire afbeelding. Er is gegeven dat
$$f(1) = 1,\ f(X) = X^2+1,\ f(X^2+1) = X^3$$
Bepaal $f(aX^2+bX+c)$.

Oefening 3.2.b $f:\ \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}[X]$ is een lineaire afbeelding. Er is gegeven dat
$$f(1) = 1,\ f(X-1) = X^2+1,\ f(X^2) = X^{10},\ f(X^3) = 0$$
Bepaal $f(aX^3+bX^2+cX+d)$.

Oefening 3.2.c $f:\ \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ is een lineaire afbeelding. Er is gegeven dat
$$f(X^i) = i$$
Bepaal $f(X^n+X^{n-1}+\cdots+1)$.

Oefening 3.3. Welk van de volgende afbeeldingen $f_i : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ zijn lineaire afbeeldingen?

1a $f_1(P(X)) = P(X)^2$;

1b $f_2(P(X)) = XP(X)$;

1c $f_3(P(X)) = P(X+1) - P(X)$;

2a $f_4(P(X)) = P(0)$;

2b $f_5(P(X)) = P(1)$;

2c $f_6(P(X)) = P''(X) - P'(X)$;

3a $f_7(P(X)) = P(X^2)$;

3b $f_8(a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n$ (met $a_n \neq 0$);

3c $f_9(a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0) = \frac{a_n}{n+1}X^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}X^n + \cdots + \frac{a_1}{2}X^2 + a_0X$.

Oefening 3.4. Bepaal de kern, het beeld, en, indien deze bestaat, de inverse van de volgende lineaire afbeeldingen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

1a $f_1(x,y) = 2(x,-y)$;

1b $f_2(x,y) = (y,0)$;

1c $f_3(x,y) = (x,x)$;

2a $f_4(x,y) = (3x+2y, 6x+4y)$;

2b $f_5(x,y) = (x+y, x-y)$;

2c $f_6(x,y) = (x+y, x+2y)$.

Oefening 3.5. Bepaal de kern, het beeld, en, indien deze bestaat, de inverse van de volgende lineaire afbeeldingen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

a $f_1(x,y,z) = (x+y, y+z, x)$;

b $f_2(x,y,z) = (2x, -z, x+z)$;

c $f_3(x,y,z) = (x+y, x-y, x+2y)$.

Oefening 3.6. Bepaal de kern en het beeld van de volgende lineaire afbeeldingen $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$:

a $f_1(P(X)) = P''(X) - 2P'(X)$;

b $f_2(P(X)) = XP(X)$;

c $f_3(a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0) = a_2X^2 + a_1X + a_0$.

Oefening 3.7. Onderstel dat $f: V \to W$ een lineaire afbeelding is. We noemen een lineaire afbeelding $g: W \to V$ een linksinverse van f als $g \circ f = 1_V$, en we noemen g een rechtsinverse van f als $f \circ g = 1_W$. Onderstel dat V en W eindigdimensionaal zijn, en bewijs dat

$$\begin{array}{rcl} f \text{ heeft een linksinverse} & \Longleftrightarrow & f \text{ is injectief} \\ f \text{ heeft een rechtsinverse} & \Longleftrightarrow & f \text{ is surjectief} \end{array}$$

Onderstel nu dat een lineaire afbeelding f een linksinverse g heeft, en een rechtsinverse h. Bewijs dat $h = g$.

Oefening 3.8. Beschouw de volgende afbeelding f:

$$\begin{array}{rrcl} f : & \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C}^2 \\ & (z_1, z_2) & \mapsto & (iz_1 + z_2, z_1 + 2iz_2) \end{array}$$

Is f $\mathbb{C}$-lineair? Is het een isomorfisme van $\mathbb{C}$-vectorruimten? Zo ja, bepaal dan de inverse afbeelding.

Oefening 3.9 (Examenvraag 2005)**.** Zij V een reële vectorruimte en $s: V \to V$ een lineaire afbeelding zodat $s \circ s = 1_V$. Beschouw dan de volgende twee deelverzamelingen van V

$$\begin{array}{rcl} U & = & \{\vec{u} \in V \mid s(\vec{u}) = \vec{u}\} \\ W & = & \{\vec{w} \in V \mid s(\vec{w}) = -\vec{w}\} \end{array}$$

Toon nu de volgende eigenschappen aan:

(i) U is een deelruimte van V;

(ii) W is een deelruimte van V;

(iii) $V = U \oplus W$.

Oefening 3.10 (Examenvraag 2006)**.** Zij $M_{22}(\mathbb{R})$ de reële vectorruimte van 2×2-matrices met reële elementen en zij $\mathscr{C}([a,b])$ de reële vectorruimte van continue functies op het interval $[a,b]$. Beschouw de afbeelding $f: M_{22}(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}([a,b])$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right) = (x_{11} - x_{12})e^x + (x_{21} + x_{22}) \sin x.$$

(i) Toon aan dat f een lineaire afbeelding is.

(ii) Bepaal de kern en het beeld van f en geef een basis voor beide deelruimten, alsook hun dimensie.

Oefening 3.11 (Examenvraag 2007)**.**

Beschouw een lineaire afbeelding $f: V \to W$. Veronderstel dat f een *split epimorfisme* is, d.w.z. dat er een lineaire afbeelding $g: W \to V$ bestaat zodat $f \circ g = 1_W$.

(i) Schrijf V als een directe som van twee niet triviale deelruimten (en verklaar).

(ii) Toon aan dat één van deze twee deelruimten isomorf is met W.

Reeks 4

Oefening 4.1. Een lineaire afbeelding $p: V \to V$ wordt een projectie genoemd als

$$p \circ p = p.$$

(i) Bewijs dat p een projectie is als en slechts als ook $1_V - p$ een projectie is.

(ii) Toon verder aan dat voor elke projectie $p: V \to V$ geldt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(p) &= \operatorname{Im}(1_V - p) \\ V &= \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Im}(p). \end{aligned}$$

Oefening 4.2. Voor twee vectorruimten V en W definieren we het product $V \times W$ door

$$V \times W = \{(\vec{v}, \vec{w}) \mid \vec{v} \in V, \ \vec{w} \in W\}.$$

Met de volgende bewerkingen is $V \times W$ een vectorruimte:

$$\begin{aligned} (\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{v}', \vec{w}') &= (\vec{v} + \vec{v}', \vec{w} + \vec{w}') \\ \alpha(\vec{v}, \vec{w}) &= (\alpha\vec{v}, \alpha\vec{w}). \end{aligned}$$

Onderstel nu dat V en W eindigdimensionale deelruimten zijn van een gegeven vectorruimte X.

(i) Toon aan dat $\dim(V \times W) = \dim(V) + \dim(W)$.

(ii) Bepaal de kern en het beeld van de lineaire afbeelding

$$f: V \times W \longrightarrow V + W: (\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} + \vec{w}.$$

(iii) Pas de tweede dimensiestelling toe op f, en leid daaruit de eerste dimensiestelling af.

Oefening 4.3.a De lineaire afbeelding $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door

$$f(x, y, z, t) = (x, y + z, z + t).$$

Bepaal de matrix van f

(i) ten opzichte van de standaardbasissen van $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$;

(ii) ten opzichte van de basissen

$$\begin{aligned} &E' = \{(1,0,0,1), (0,0,0,1), (1,1,0,0), (0,1,1,0)\} \text{ van } \mathbb{R}^4 \\ &F' = \{(1,1,0), (0,1,0), (1,0,1)\} \text{ van } \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Oefening 4.3.b De lineaire afbeelding $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door

$$f(x,y) = (x+2y, -x, y).$$

Bepaal de matrix van f

(i) ten opzichte van de standaardbasissen van $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$;

(ii) ten opzichte van de basissen

$$\begin{aligned} E' &= \{(1,3),(-2,4)\} \text{ van } \mathbb{R}^2 \\ F' &= \{(1,1,1),(2,2,0),(3,0,0)\} \text{ van } \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Oefening 4.3.c De lineaire afbeelding $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ wordt gegeven door

$$f(x,y,z) = (3x-2y+z, x+6y+2z, -3x+7z, 2x+y).$$

Bepaal de matrix van f

(i) ten opzichte van de standaardbasissen van $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^4$;

(ii) ten opzichte van de basissen

$$\begin{aligned} E' &= \{(0,8,8),(-7,8,1),(-6,9,1)\} \text{ van } \mathbb{R}^3 \\ F' &= \{(0,1,1,1),(1,-1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1)\} \text{ van } \mathbb{R}^4. \end{aligned}$$

Oefening 4.4.a $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de lineaire afbeelding met matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ten opzichte van de standaardbasis van $\mathbb{R}^3$. Bepaal $f((1,2,3))$ en $f((4,5,6))$.

Oefening 4.4.b $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ is de lineaire afbeelding met matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ten opzichte van de standaardbasissen van $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$. Bepaal $f((2,3,-1))$ en $f((4,2,-1))$.

Oefening 4.4.c $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ is de lineaire afbeelding met matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ -7 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ten opzichte van de standaardbasissen van $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^4$. Bepaal $f((1,3,-1))$ en $f((0,3,6))$.

Oefening 4.5.a V is de deelruimte van $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ met als basis

$$E = \{1, x, e^x, xe^x\}.$$

Bepaal de matrix ten opzichte van E van de lineaire afbeelding

$$D : V \to V : f \mapsto f'.$$

Oefening 4.5.b V is de deelruimte van $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ met als basis

$$E = \{\cos x, \sin x, e^x\}.$$

Bepaal de matrix ten opzichte van E van de lineaire afbeelding

$$D : V \to V : f \mapsto f'''.$$

Oefening 4.5.c V is de deelruimte van $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ met als basis

$$E = \{1, x+1, x^2+x+1\}.$$

Bepaal de matrix ten opzichte van E van de lineaire afbeelding

$$D : V \to V : f \mapsto f - 2f'.$$

Oefening 4.6. Beschouw een lineaire afbeelding $f : V \to V$. Een deelruimte W van V noemen we invariant onder f als $f(W) \subset W$. Onderstel dat W invariant is onder de lineaire afbeelding f, en dat $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$. Bewijs dat we een basis van V kunnen vinden zodanig dat de matrix van f ten opzichte van deze basis er als volgt uitziet:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

waarbij $A \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_{m(n-m)}(\mathbb{K})$, $C \in \mathrm{M}_{(n-m)(n-m)}(\mathbb{K})$ en 0 de $(n-m) \times m$ nulmatrix.

Oefening 4.7. Bepaal de dimensies van de volgende vectorruimten:

1a $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$;

1b $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{M}_{23}(\mathbb{R}), \mathbb{R}^2)$;

1c $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathrm{M}_{31}(\mathbb{R}))$;

2a $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}_3[X])$;

2b $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_3[X])$;

2c $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{M}_{22}, \mathrm{M}_{33})$.

Oefening 4.8. Beschouw de afbeelding $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{C}$ met $f(a,b,c)=b+(a-c)i$, voor elke $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, als voorschrift. Hierbij beschouwen we $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{C}$ als vectorruimten over $\mathbb{R}$.

(i) Toon aan dat f lineair is.

(ii) Bepaal de kern en het beeld van f. Vind een basis van deze twee deelruimten, en bepaal hun dimensie.

(iii) Bepaal vervolgens de matrix van f ten opzichte van de standaardbasissen van $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{C}$.

Oefening 4.9 (Examenvraag 2005)**.** Beschouw de afbeelding $f:\mathbb{R}_3[X]\to\mathbb{R}_5[X]$ gedefinieerd door

$$f(P(X))=P''(X)-P'(0)+P'(X)X^2+(P(1)-P(0))X^5$$

voor $P(X)\in\mathbb{R}_3[X]$.

(i) Toon aan dat dit een lineaire afbeelding is.

(ii) Bepaal een basis en de dimensie van de kern van f.

(iii) Bepaal een basis en de dimensie van het beeld van f.

(iv) Bepaal de matrix van f t.o.v. de standaardbasissen van $\mathbb{R}_3[X]$ en $\mathbb{R}_5[X]$.

Reeks 5

Oefening 5.1.a De lineaire afbeelding $f:\ \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})\to\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ wordt gedefinieerd door

$$f\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

Bepaal de matrix van f ten opzichte van de standaardbasis van $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$.

Oefening 5.1.b De lineaire afbeelding $f:\ \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})\to\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ wordt gedefinieerd door

$$f\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

Bepaal de matrix van f ten opzichte van de standaardbasis van $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$.

Oefening 5.1.c De lineaire afbeelding $f:\ \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})\to\mathrm{M}_{23}(\mathbb{R})$ wordt gedefinieerd door

$$f\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

Bepaal de matrix van f ten opzichte van de standaardbasissen van $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ en $\mathrm{M}_{23}(\mathbb{R})$.

Oefening 5.2. Zoek 2×2-matrices A en B zodanig dat

$$AB = 0 \quad \text{en} \quad BA \neq 0$$

Oefening 5.3. Herinner dat we de matrix E_{ij} definieren als de matrix met een 1 in de (i,j)-positie, en overal elders 0:

$$\big(E_{ij}\big)_{k\ell} = \delta_{ik}\delta_{j\ell}$$

voor $i,j,k,\ell = 1,\cdots,n$. Bepaal nu voor elke $n\times n$-matrix A de producten AE_{ij} en $E_{ij}A$. Toon aan dat

$$\begin{aligned}\big(AE_{ij}\big)_{pq} &= \delta_{jq}a_{pi}\\ \big(E_{ij}A\big)_{pq} &= \delta_{ip}a_{jq}\end{aligned}$$

Oefening 5.4. Onderstel dat $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{R})$ commuteert met elke matrix $B \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{R})$:

$$\forall B \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{R}): \ \ AB = BA$$

Bewijs dan dat A een veelvoud is van de eenheidsmatrix: $A = \alpha I_n$. Gebruik hiervoor de voorgaande oefening.

Oefening 5.5.a De matrix A van de lineaire afbeelding $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ten opzichte van de standaardbasis wordt gegeven door:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\3&2&1\end{pmatrix}.$$

Wat is de matrix van f ten opzichte van de basis

$$\{(1,0,1),(1,0,-1),(1,1,1)\}.$$

Oefening 5.5.b De matrix A van de lineaire afbeelding $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ten opzichte van de standaardbasis wordt gegeven door:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&4\\5&0&1\end{pmatrix}.$$

Wat is de matrix van f ten opzichte van de basis

$$\{(1,-1,1),(1,2,2),(1,1,1)\}.$$

Oefening 5.5.c De matrix A van de lineaire afbeelding $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ten opzichte van de basis

$$\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$$

wordt gegeven door:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Wat is de matrix van f ten opzichte van de basis

$$\{(1,0,1),(1,0,-1),(1,1,1)\}.$$

Oefening 5.6.a Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Gebruik elementaire rijoperaties om A in rij echelon vorm te brengen, en om A in gereduceerde rij echelon vorm te brengen. Wat is de rang van A? Geef een basis van de deelruimte van $\mathbb{R}^5$ voortgebracht door de rijen van A.
Gebruik elementaire kolomoperaties om A in kolom echelon vorm te brengen. Verifieer dat het aantal lineair onafhankelijke kolommen van A gelijk is aan het aantal lineair onafhankelijke rijen. Geef een basis voor de vectorruimte voortgebracht door de kolommen van A.

Oefening 5.6.b Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gebruik elementaire rijoperaties om A in rij echelon vorm te brengen, en om A in gereduceerde rij echelon vorm te brengen. Wat is de rang van A? Geef een basis van de deelruimte van $\mathbb{R}^5$ voortgebracht door de rijen van A.
Gebruik elementaire kolomoperaties om A in kolom echelon vorm te brengen. Verifieer dat het aantal lineair onafhankelijke kolommen van A gelijk is aan het aantal lineair onafhankelijke rijen. Geef een basis voor de vectorruimte voortgebracht door de kolommen van A.

Oefening 5.6.c Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gebruik elementaire kolomoperaties om A in kolom echelon vorm te brengen, en om A in gereduceerde kolom echelon vorm te brengen. Wat is de rang van A? Geef een basis van de deelruimte van $\mathbb{R}^4$ voortgebracht door de kolommen van A.
Gebruik elementaire rijoperaties om A in rij echelon vorm te brengen. Verifieer dat het aantal lineair onafhankelijke kolommen van A gelijk is aan het aantal lineair onafhankelijke rijen. Geef een basis voor de vectorruimte voortgebracht door de rijen van A.

Oefening 5.7 (Examenvraag 2005)**.** Beschouw de reële vectorruimte

$$V = \begin{pmatrix} \mathbb{R}_2[X] & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{R}_1[X] \end{pmatrix},$$

d.w.z., V bestaat uit 2×2-matrices van de vorm

$$\begin{pmatrix} R(X) & x \\ 0 & Q(X) \end{pmatrix},$$

waarbij $R(X) \in \mathbb{R}_2[X], Q(X) \in \mathbb{R}_1[X]$ en $x \in \mathbb{R}$.

(a) Geef een basis (noem deze E) en de dimensie van V.

(b) Beschouw de afbeelding $f : \mathbb{R}_3[X] \to V$ gedefinieerd door

$$f(P(X)) = \begin{pmatrix} P'(X) & P'(0) - P''(0) \\ 0 & P''(X) \end{pmatrix},$$

voor $P(X) \in \mathbb{R}_3[X]$.

(i) Toon dat dit een lineaire afbeelding is.

(ii) Bepaal een basis en de dimensie van de kern van f.

(iii) Bepaal een basis en de dimensie van het beeld van f.

(iv) Bepaal de matrix van f t.o.v. de standaardbasis van $\mathbb{R}_3[X]$ en de basis E (zie deel (a)) van V.

Oefening 5.8 (Examenvraag 2006)**.** Beschouw de $\mathbb{R}$-vectorruimten $\mathbb{C}^2$ en $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ en de volgende afbeelding ertussen:

$$f : \mathbb{C}^2 \to \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}), f((z,w)) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z) & \mathrm{Re}(w-z) \\ 0 & \mathrm{Im}(\overline{z}) \end{pmatrix}.$$

(a) Toon aan dat f lineair is.

(b) Bepaal de kern en het beeld van f. Vind een basis van deze twee deelruimten, en bepaal hun dimensie.

(c) Geef een basis F van $\mathbb{C}^2$. Bepaal vervolgens de matrix van f ten opzichte van deze basis F en de standaardbasis E van $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$.

Oefening 5.9 (Examenvraag 2014)**.** Beschouw de lineaire afbeelding $f:\mathbb{R}^3 \to \mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ waarvoor

$$f(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ c+a & a+b+c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+b & b+c \\ c+a & a+b+c \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal $\ker(f)$; geef een basis voor deze deelruimte en bepaal haar dimensie.
Vul deze basis aan tot een basis E van $\mathbb{R}^3$.

(b) Bepaal $\mathrm{Im}\,(f)$; geef een basis voor deze deelruimte en bepaal haar dimensie.
Vul deze basis aan tot een basis F van $\mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

(c) Geef de matrix van f ten opzichte van de standaardbasissen van $\mathbb{R}^3$ en $\mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.
Gebruik overgangsmatrices om de matrix van f te bepalen ten opzichte van de basissen

$$E' = \{(1,1,0),(2,0,1),(-1,-1,1)\} \text{ van } \mathbb{R}^3$$

en

$$F' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ van } \mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R}).$$

Reeks 6

Oefening 6.1. Onderstel dat L_1 en L_2 twee lineaire variëteiten zijn in een vectorruimte V. Bewijs dat $L_1 \cap L_2$ ofwel leeg is, ofwel ook een lineaire variëteit is.

Oefening 6.2. Toon aan dat de samenstelling van twee affiene afbeeldingen opnieuw een affiene afbeelding is.

Oefening 6.3. Onderstel dat twee lineaire variëteiten L_1 en L_2 evenwijdig zijn, en dat $\dim(L_1) \leq \dim(L_2)$. Toon aan dat

$$L_1 \cap L_2 \neq \varnothing \implies L_1 \subset L_2$$

Oefening 6.4. Los de volgende lineaire stelsels op via Gauss eliminatie:

a

$$\begin{cases} x+3y+z=4 \\ 2x+2y+z=-1 \\ 2x+3y+z=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x-2y-3z=0 \\ w+x+4y+4z=7 \\ w+3x+7y+9z=4 \\ w+4x+8y+11z=1 \end{cases}$$

b

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+5y+5z=5 \\ 3x+5y+8z=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-z-t=0 \\ 3x+2y-z-t=8 \\ 2x-2y+2z+2t=2 \\ -3x+4y-3z-3t=4 \end{cases}$$

c

$$\begin{cases} x+y=-7 \\ 2x+4y+z=-16 \\ x+2y+z=9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y+3z-t=0 \\ y-3z+5t=2 \\ x-z+t=0 \\ -x+y-z+7t=4 \end{cases}$$

Oefening 6.5. Waaraan moeten de parameters $b_1, b_2, \cdots$ voldoen opdat de volgende stelsels consistent zouden zijn?

a

$$\begin{cases} 6x-4y=b_1 \\ 3x-2y=b_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2y+5z=b_1 \\ 4x-5y+8z=b_2 \\ -3x+3y-3z=b_3 \end{cases}$$

b

$$\begin{cases} x-2y-z=b_1 \\ -4x+5y+2z=b_2 \\ -4x+7y+4z=b_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y+3z+2t=b_1 \\ -2x+y+5z+t=b_2 \\ -3x+2y+2z-t=b_3 \\ 4x-3y+z+3t=b_4 \end{cases}$$

c

$$\begin{cases} x+2y-3z=b_1 \\ 2x+6y-11z=b_2 \\ x-2y+7z=b_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y+3z-t=b_1 \\ y-3z+5t=b_2 \\ x-3y+3z-t=b_3 \\ x+2y-5t=b_4 \end{cases}$$

Oefening 6.6. Zoek de inverse van de volgende matrices met behulp van de Gauss-Jordan eliminatie methode:

a

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix};\quad D=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&-2&0&0\\1&2&1&-2\\0&3&2&1\end{pmatrix};\quad G=\begin{pmatrix}a&0&0&0\\1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\end{pmatrix}$$

b

$$B=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&1&2\\1&0&3\end{pmatrix};\quad E=\begin{pmatrix}a_1&0&0&0\\0&a_2&0&0\\0&0&a_3&0\\0&0&0&a_4\end{pmatrix};\quad H=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&3&0&0\\1&3&5&0\\1&3&5&7\end{pmatrix}$$

c

$$C=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix};\quad F=\begin{pmatrix}0&0&0&a_1\\0&0&a_2&0\\0&a_3&0&0\\a_4&0&0&0\end{pmatrix};\quad I=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&0&7\\3&-5&0\end{pmatrix}$$

Oefening 6.7 (Examenvraag 2004)**.** Zij

$$A=\begin{pmatrix}1&3&2\\0&1&1\\2&5&3\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}6&6&6\\2&2&2\\10&10&10\end{pmatrix}$$

en beschouw het deel

$$L=\{X\in M_{3,3}(\mathbb{R})|AX=B\}.$$

L is een lineaire variëteit, i.e. L is van de vorm $\vec{a}+W$ waarbij W een deelruimte is van $M_{3,3}(\mathbb{R})$.

(a) Geef zo'n vector $\vec{a}$ en beschrijf het deel W.

(b) Toon aan dat W een deelruimte is.

(c) Wat is de dimensie van L?

Reeks 7

Oefening 7.1.a Voor welke waarden (a,b,c) heeft het lineaire stelsel

$$\begin{cases}x+y+2z&=&a\\x+z&=&b\\2x+y+3z&=&c\end{cases}$$

een oplossing? Bepaal het beeld van de lineaire afbeelding

$$f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3:\ X \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} X.$$

Oefening 7.1.b Voor welke waarden (a,b,c) heeft het lineaire stelsel

$$\begin{cases} x+2y+8z & = & a \\ 2x-6y-14z & = & b \\ 2x-y+z & = & c \end{cases}$$

een oplossing? Bepaal het beeld van de lineaire afbeelding

$$f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3:\ X \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & -6 & -14 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} X.$$

Oefening 7.1.c Voor welke waarden (a,b,c) heeft het lineaire stelsel

$$\begin{cases} 3x-z & = & a \\ -5y+z & = & b \\ 6x+10y-4z & = & c \end{cases}$$

een oplossing? Bepaal het beeld van de lineaire afbeelding

$$f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3:\ X \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 6 & 10 & -4 \end{pmatrix} X.$$

Oefening 7.2. Het *spoor* van een vierkante matrix wordt als volgt gedefiniëerd: voor

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

stellen we

$$\mathrm{Sp}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Toon aan dat voor elke $A,B \in \mathrm{M}_{nn}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(A+B) &= \mathrm{Sp}(A)+\mathrm{Sp}(B) \\ \mathrm{Sp}(\alpha A) &= \alpha\mathrm{Sp}(A) \\ \mathrm{Sp}(A^t) &= \mathrm{Sp}(A) \\ \mathrm{Sp}(AB) &= \mathrm{Sp}(BA). \end{aligned}$$

Oefening 7.3. Leid uit de vorige oefening af dat er geen $n \times n$ matrices bestaan zodat

$$AB - BA = I_n.$$

Oefening 7.4. A is de $n \times n$-matrix met een 1 op elke plaats. Toon voor $n > 1$ aan dat

$$(I_n - A)^{-1} = I_n - \frac{1}{n-1}A.$$

Oefening 7.5. Onderstel dat $A, B \in \mathrm{M}_{n,n}$ en dat A regulier is. Bewijs dat

$$A + B \text{ regulier} \iff I_n + BA^{-1} \text{ regulier.}$$

Oefening 7.6. Een matrix E wordt een *elementaire* $n \times n$-matrix van type I, II of III genoemd indien E wordt verkregen door op de eenheidsmatrix I_n een elementaire rij of kolomoperatie van type I, II of III toe te passen.

- Hoe ziet een elementaire $n \times n$-matrix eruit ? Toon aan dat elke elementaire matrix regulier is, en bepaal de inverse matrix.
- Onderstel dat A een $m \times n$-matrix is, en dat B uit A wordt verkregen door toepassing van een elementaire rij (kolom) operatie. Laat E de elementaire $m \times m$-matrix (elementaire $n \times n$-matrix) die uit I_m (I_n) verkregen wordt door toepassing van dezelfde elementaire rij (kolom) operatie. Bewijs dat $B = EA$ ($B = AE$).
- Toon aan dat twee matrices A en B rijequivalent zijn als er een stel elementaire matrices $E_1, E_2, \cdots, E_k$ bestaan zodat
$$B = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A$$
Formuleer een analoog resultaat voor kolomequivalente matrices
- Laat zien dat de enige reguliere $n \times n$-matrix in gereduceerde rij of kolom echelon vorm de eenheidsmatrix I_n is.
- Bewijs nu voor een vierkante matrix A dat

$$\begin{aligned} A \text{ regulier} &\iff A \text{ is een product van elementaire matrices} \\ &\iff A \text{ is rijequivalent met } I_n \end{aligned}$$

Reeks 8

Oefening 8.1. Schrijf de banen op van de volgende permutaties, en bepaal de pariteit. Schrijf de eerste permutatie als een samenstelling van verwisselingen.

1a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1b

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

1c

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

2a

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f \\ a & f & c & b & d & e \end{bmatrix}$$

2b

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f \\ c & f & b & d & a & e \end{bmatrix}$$

2c

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f \\ c & d & b & e & f & a \end{bmatrix}$$

Oefening 8.2. Gegeven zijn de permutaties α en β. Gevraagd wordt om $\alpha^{-1} \circ \beta^{-1} \circ \alpha \circ \beta$ te berekenen.

1a

$$\alpha = [1,2,3] \text{ en } \beta = [1,4,5]$$

1b

$$\alpha = [1,2,3,4] \text{ en } \beta = [1,3,5]$$

1c

$$\alpha = [1,2,3] \text{ en } \beta = [4,5,6]$$

Oefening 8.3. Gegeven zijn de permutaties α en β. Schrijf de banen van α en β op, en bepaal α^{-1}, β^{-1}, $\alpha \circ \beta$ en $\beta \circ \alpha$.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 5 & 6 & 2 & 7 & 1 & 4 & 9 & 11 & 10 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 11 & 12 & 10 & 6 & 7 & 4 & 5 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Oefening 8.4. Toon aan dat de volgende verzameling permutaties een deelgroep[1] van S_4 vormt:

$$\{i, \alpha = [1,2] \circ [3,4], \beta = [1,3] \circ [2,4], \gamma = [1,4] \circ [2,3]\}$$

[1]Naar analogie met ‘deelruimte’: de gegeven verzameling vormt een groep op zichzelf voor de bewerking van S_4.

Oefening 8.5. Schrijf alle permutaties van A_4 op.

Oefening 8.6. Toon aan dat elke permutatie van S_n kan geschreven worden als samenstelling van de verwisselingen

$$[1,2],\ [1,3],\ [1,4],\cdots,[1,n].$$

Oefening 8.7. Bereken de volgende determinanten

a

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

b

$$\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} 9 & 1 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 0 & 9 & 9 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 9 & 0 & 3 & 9 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

c

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} b-1 & 0 & 1 \\ -2 & b & -1 \\ 0 & 0 & b+1 \end{vmatrix}$$

Oefening 8.8. Toon aan dat

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & ab & ac \\ ab & (c+a)^2 & bc \\ ac & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$$

Oefening 8.9. Bereken de determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

Oefening 8.10. Noteer voor D_n de determinant

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Toon aan dat

$$D_n = (a_n - a_1)(a_n - a_2)\cdots(a_n - a_{n-1})D_{n-1}$$

en leid hieruit af dat

$$D_n = \prod_{j>i}(a_j - a_i).$$

We noemen de determinant D_n ook wel de *determinant van Vandermonde*.

Oefening 8.11. Bewijs per inductie op n:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n\Big(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\Big).$$

Hoe ziet de formule eruit als een van de $a_i = 0$?

Oefening 8.12. Beschouw drie niet-collineaire punten $(x_1,y_1,z_1),\ (x_2,y_2,z_2),\ (x_3,y_3,z_3) \in \mathbb{K}^3$. Toon aan dat de vergelijking van het vlak dat door deze drie punten gaat als volgt kan geschreven worden:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Veralgemeen deze eigenschap voor een hypervlak in $\mathbb{K}^n$.

Oefening 8.13. Onderstel dat A een reguliere matrix is. Toon aan dat $\mathrm{adj}(A)^{-1} = \mathrm{adj}(A^{-1})$.

Oefening 8.14. Een reguliere matrix A bevat enkel gehele elementen. Toon aan dat A^{-1} ook enkel gehele elementen bevat als en slechts als $\det(A) = \pm 1$.

Oplossingen

Oefening 1.2 a 1a geen deelruimte, 2a geen deelruimte, 3a deelruimte, 4a deelruimte, 5a geen deelruimte.

b 1b deelruimte, 2b deelruimte, 3b geen deelruimte, 4b deelruimte, 5b geen deelruimte.

c 1c deelruimte, 2c deelruimte, 3c deelruimte, 4c deelruimte, 5c geen deelruimte.

Oefening 1.3 a 1a geen deelruimte, 2a deelruimte, 3a deelruimte, 4a geen deelruimte.

b 1b deelruimte, 2b deelruimte, 3b geen deelruimte, 4b geen deelruimte

c 1c deelruimte, 2c geen deelruimte, 3c deelruimte, 4c deelruimte.

Oefening 1.5 a 1a deelruimte, 2a deelruimte, 3a geen deelruimte.

b 1b geen deelruimte, 2b deelruimte, 3b deelruimte.

c 1c deelruimte, 2c deelruimte, 3c geen deelruimte.

Oefening 1.6 a 1a lin. afhankelijk, 2a lin. afhankelijk.

b 1b lin. afhankeljk, 2b lin. onafhankelijk

c 1c lin. onafhankelijk, 2c lin. afhankelijk.

Oefening 1.7 a 1a lin. onafhankelijk, 2a lin. onafhankelijk.

b 1b lin. afhankelijk, 2b lin. afhankelijk.

c 1c lin. afhankelijk, 2c lin. afhankelijk.

Oefening 1.8 a 1a lin. onafhankelijk, 2a lin. onafhankelijk.

b 1b lin. onafhankelijk. 2b lin. afhankelijk.

c 1c lin. afhankelijk. 2c lin. onafhankelijk.

Oefening 2.1 a 1a voortbrengend, 2a niet voortbrengend.

b 1b voortbrengend, 2b voortbrengend.

c 1c voortbrengend, 2c niet voortbrengend.

Oefening 2.3 a 1a $\{(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$, 2a $\{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}$.

b 1b $\{(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$, 2b $\{(1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,0)\}$.

c 1c $\{(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$, 2c $\{(1,0,1,1),(0,1,-1,1)\}$

Oefening 2.4 a 1a $\{X-1, X^2-1, X^3-1\}$, 2a $\{1, X\}$.

b 1b $\{1\}$, 2b $\{1, X, X^3-3X^2\}$.

b 1c $\{1, -2X+X^2, -3X+X^3\}$, 2c $\{1, -3X+X^2, -7X+X^3\}$.

Oefening 2.5

dimensie 3 : $\mathbb{R}^3$, dimensie 2 : alle vlakken door de oorsprong, dimensie 1 : alle rechten door de oorsprong, dimensie 0 : singleton met de nulvector.

Oefening 3.1

a 1a lineair, 2a niet lineair, 3a niet lineair.

b 1b lineair, 2b lineair, 3b niet lineair.

c 1c lineair, 2c niet lineair, 3c niet lineair.

Oefening 3.2

a $aX^3+bX^2+b+c-a$.

b $bX^{10}+cX^2+d+2c$.

c $\frac{n(n+1)}{2}$.

Oefening 3.3

a 1a niet lineair, 2a lineair, 3a lineair.

b 1b lineair, 2b lineair, 3b niet lineair.

c 1c lineair, 2c lineair, 3c lineair.

Oefening 3.4

a 1a $\operatorname{Ker} f=\{\vec{o}\}$, $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}^2$, $f^{-1}(x,y)=(\frac{x}{2},-\frac{y}{2})$, 2a $\operatorname{Ker} f=\{(x,-\frac{3}{2}x)\mid x\in\mathbb{R}\}$, $\operatorname{Im} f=\{(x,2x)\mid x\in\mathbb{R}\}$.

b 1b $\operatorname{Ker} f=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$, $\operatorname{Im} f=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$, 2b $\operatorname{Ker} f=\{\vec{o}\}$, $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}^2$, $f^{-1}(x,y)=(\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2})$.

c 1c $\operatorname{Ker} f=\{(0,y)\mid y\in\mathbb{R}\}$, $\operatorname{Im} f=\{(x,x)\mid x\in\mathbb{R}\}$, 2c $\operatorname{Ker} f=\{\vec{o}\}$, $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}^2$, $f^{-1}(x,y)=(2x-y,-x+y)$.

Oefening 3.5

a $\operatorname{Ker} f=\{\vec{o}\}$, $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}^3$, $f^{-1}(x,y,z)=(z,x-z,y-x+z)$,

b $\operatorname{Ker} f=\{(0,y,0)\mid y\in\mathbb{R}\}$, $\operatorname{Im} f=\{(x,y,\frac{x}{2}-y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$,

c $\operatorname{Ker} f=\{(0,0,z)\mid z\in\mathbb{R}\}$, $\operatorname{Im} f=\{(x,y,\frac{3}{2}x-\frac{y}{2})\mid x,y\in\mathbb{R}\}$.

Oefening 3.6

a $\operatorname{Ker} f=\{P\in R[X]\mid P$ is een constante veelterm $\}$, $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}[X]$,

b $\operatorname{Ker} f=\{0\}$, $\operatorname{Im} f=\{P\in\mathbb{R}[X]\mid P(0)=0\}$,

c $\operatorname{Ker} f=\{P\in\mathbb{R}[X]\mid P(0)=P'(0)=P''(0)=0\}$, $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}_2[X]$.

Oefening 4.3

a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \\ \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

c $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ -3 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 8 & -27 & -13 \\ -8 & -36 & -35 \\ 48 & 34 & 28 \\ 0 & 21 & 10 \end{pmatrix}$

Oefening 4.4

a $f((1,2,3)) = (10,17,4)$, $f((4,5,6)) = (25,38,10)$,

b $f((2,3,-1)) = (-11,-1)$, $f((4,2,-1)) = (-7,1)$,

c $f((1,3,-1)) = (4,22,0,1)$, $f((0,3,6)) = (24,-27,21,24)$.

Oefening 4.5

a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Oefening 4.7

a 1a dim = 6, 2a dim = 12,

b 1b dim =12, 2b dim = 4,

c 1c dim = 3, 2c dim = 36.

Oefening 5.1

a $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

c $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Oefening 5.2

Bijvoorbeeld : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Oefening 5.5

a $\begin{pmatrix} -6 & 2 & -9 \\ 0 & -2 & 0 \\ 10 & -2 & 15 \end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \\ 5 & 2 & 3 \\ -\frac{11}{2} & \frac{15}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

c $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{11}{2} & \frac{5}{2} \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

Oefening 5.6

a rijrang = kolomrang = 3,

basis voor deelruimte voortgebracht door rijen :

$\{(1,0,0,0,0),(0,0,1,2,0),(0,0,0,0,1)\}$,

basis voor de deelruimte voortgebracht door de kolommen :

$\{(1,0,0,2/7),(0,1,0,18/21),(0,0,1,4/7)\}$,

b rijrang = kolomrang = 3,

basis voor deelruimte voortgebracht door rijen :

$\{(1,0,2,1,0),(0,1,0,0,0),(0,0,0,0,1)\}$,

basis voor de deelruimte voortgebracht door de kolommen :

$\{(1,0,1/4,2),(0,1,1/2,-1),(0,0,1,5)\}$,

c rijrang = kolomrang = 3,

basis voor deelruimte voortgebracht door rijen :

$\{(1,0,0,-1),(0,1,0,1),(0,0,1,0)\}$,

basis voor de deelruimte voortgebracht door de kolommen :

$\{(1,0,3,1,0),(0,1,0,0,0),(0,0,0,0,1)\}$.

Oefening 6.4

a $x=-1, y=4, z=-7$ en $x=-w+5, y=4-w, z=w-1, w\in\mathbb{R}$.

b $x=0, y=2, z=-1$ en $x=1/2, y=7, z=15/2-t, t\in\mathbb{R}$.

c $x=11, y=-18, z=34$ en $x=2-4t, y=8-14t, z=2-3t, t\in\mathbb{R}$.

Oefening 6.5

a $b_1=2b_2$; $b_1-b_2=b_3$,

b elke keuze is goed; $b_2-b_1=b_3$, $2b_1-b_2=b_4$,

c $-5b_1+2b_2+b_3=0$; elke keuze is goed.

Oefening 6.6

a A heeft geen invers, $D^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$, $G^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ \frac{1}{a^3} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{1}{a^4} & \frac{1}{a^3} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$,

b $B^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$, $E^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_4} \end{pmatrix}$, $H^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$,

c $C^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{d}{da-cb} & \frac{-b}{da-cb} \\ \frac{-c}{da-cb} & \frac{a}{da-cb} \end{pmatrix}$, $F^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{7} & 0 \\ \frac{3}{5} & -\frac{9}{35} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 \end{pmatrix}$.

Oefening 7.1

a $c=a+b$, $\mathrm{Im}\,\mathrm{f}: z=x+y$,

b $2a+b-2c=0$, $\mathrm{Im}\,\mathrm{f}: 2x+y-2z=0$,

c $2a-2b=c$, $\mathrm{Im}\,\mathrm{f}: 2x-2y=z$.

Oefening 8.1

a [1 6] $\circ$ [2 5] $\circ$ [3 4], oneven;

[b f e d], oneven

b [1 2] $\circ$ [4 5], even;

[a c b f e], even,

c [4 6] $\circ$ [1 2 3] = [4 6] $\circ$ [1 3] $\circ$ [1 2], oneven;

[a c b d e f], oneven.

Oefening 8.7

a 1; -16;

b 2abc; -12;

c 0; $b^3 - b$.

Oefening 8.9

(b-a)(c-a)(c-b)

Oefening 8.11

Als $a_i = 0 : a_1 \ldots a_{i-1} a_{i+1} \ldots a_n$

Bibliografie

[1] M. Artin, Algebra, Prentice Hall, New Jersey, 1991.

[2] P.M. Cohn, Algebra Volume I, John Wiley, New York, 1974.

[3] S. Lang, Linear Algebra, Addison-Wesley, 1965.

[4] B. Kolman, Elementary Linear Algebra, MacMillan, New York, 1970.

[5] S. Caenepeel, Wiskundige Analyse Deel I, Dienst Uitgaven VUB, Brussel, 2002.

[6] S. Caenepeel, Wiskundige Analyse Deel II, Dienst Uitgaven VUB, Brussel, 2002.

Index